512(075.2)
C 101 D

*Ths. Nguyễn Văn Phước*
*(Biên soạn)*

# CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM

# ĐẠI SỐ 10

***(Ban khoa học tự nhiên)***

- TÓM TẮT LÍ THUYẾT
- HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN
- TOÁN TRẮC NGHIỆM

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN
Đ / VL / 4959

**NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP TP. HỒ CHÍ MINH**

# Lời nói đầu

Để chuẩn bị cho các em học sinh lớp 10 làm bài kiểm tra toán bằng phương pháp trắc nghiệm đạt kết quả tốt, chúng tôi biên soạn cuốn:

***CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ 10***

Sách gồm sáu chương:

Nội dung mỗi chương gồm có:

*A. Tóm tắt lí thuyết.*

*B. Hướng dẫn giải toán.*

*C. Toán trắc nghiệm.*

Ở phần toán trắc nghiệm chúng tôi biên soạn theo thứ tự từng bài trong mỗi chương. Trong mỗi câu có 4 sự lựa chọn, học sinh sẽ chọn 1 trong 4 để trả lời. Riêng ở đề ***Ôn tập chương*** chúng tôi đưa ra thêm một số dạng bài tập trắc nghiệm khác để học sinh ôn tập có hiệu quả hơn.

Mong rằng cuốn sách này sẽ giúp các em có thể tự rèn luyện để làm tốt các bài thi trắc nghiệm.

Cuối cùng chúng tôi mong nhận được những ý kiến chân thành, xây dựng của quý đồng nghiệp, quý độc giả và các em học sinh để cuốn sách ngày một hoàn thiện hơn.

Tác giả

***Ths. Nguyễn Văn Phước***

# CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ – TẬP HỢP

## §1. MỆNH ĐỀ

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Khái niệm mệnh đề**

Mệnh đề là một câu khẳng định thỏa hai điều kiện:

- ❖ Phải hoặc đúng hoặc sai.
- ❖ Không thể vừa đúng, vừa sai.

**II. Phủ định của một mệnh đề**

Phủ định của mệnh đề A là một mệnh đề, kí hiệu là $\overline{A}$, sao cho:

- ❖ Nếu A **đúng** thì $\overline{A}$ **sai**.
- ❖ Nếu A **sai** thì $\overline{A}$ **đúng**.

Mệnh đề $\overline{A}$ đọc là "không A".

**III. Mệnh đề kéo theo**

1. ***Ví dụ:*** Xét câu "**Nếu** một tam giác có hai góc bằng $60^0$ **thì** tam giác đó là tam giác đều".

   Trong câu này có hai mệnh đề:

   A = "Tam giác có hai góc bằng $60^0$"

   B = "Tam giác đó là tam giác đều"

   Hai mệnh đề này nối với nhau bởi các liên từ **nếu**... **thì**... và tạo nên một mệnh đề mới được kí hiệu là $A \Rightarrow B$ (đọc là A kéo theo B, nếu A thì B).

2. ***Tính đúng sai của mệnh đề $A \Rightarrow B$***

   Mệnh đề $A \Rightarrow B$ chỉ sai khi A đúng và B sai.

3. ***Mệnh đề đảo***

   Cho mệnh đề $A \Rightarrow B$.

   Khi đó mệnh đề $A \Rightarrow B$ gọi là **mệnh đề đảo** của mệnh đề $A \Rightarrow B$.

   **** Chú ý:*** Mệnh đề đảo của mệnh đề đúng không nhất thiết là đúng.

4. ***Điều kiện cần và điều kiện đủ***

   Các định lí toán học là những mệnh đề đúng và thường có dạng $A \Rightarrow B$.

   Khi đó ta nói: * A là **điều kiện đủ** để có B.

   * B là **điều kiện cần** để có A.

**5. *Phương pháp chứng minh mệnh đề $A \Rightarrow B$***

Chứng minh định lí dạng $A \Rightarrow B$ nghĩa là chứng minh mệnh đề $A \Rightarrow B$ đúng.

Phép chứng minh đó được tiến hành theo các bước sau:

a) Giả thiết rằng mệnh đề A đúng.

b) Sử dụng giả thiết và các kiến thức đã biết, bằng các lập luận toán học suy ra mệnh đề B đúng.

c) Kết luận mệnh đề $A \Rightarrow B$ đúng.

Trong mệnh đề $A \Rightarrow B$, A gọi là giả thiết, B gọi là kết luận.

## IV. Mệnh đề tương đương

**1. *Ví dụ:*** Cho tam giác ABC, xét hai mệnh đề:

A = "Tam giác ABC đều"

B = "Tam giác ABC cân và có một góc bằng $60^0$".

Ta thấy cả hai mệnh đề $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$ đều đúng, ta nói hai mệnh đề A và B **tương đương** với nhau, kí hiệu $A \Leftrightarrow B$.

**2. *Mệnh đề tương đương***

Từ hai mệnh đề A và B có thể tạo mệnh đề mới $A \Leftrightarrow B$, đọc là A **tương đương** B, mệnh đề này đúng khi A và B cùng đúng hoặc cùng sai.

* ***Chú ý:*** + Mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ đúng có nghĩa là cả hai mệnh đề kéo theo $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$ đều đúng.

+ Đôi khi người ta còn phát biểu mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ là "A **khi và chỉ khi** B", "A **nếu và chỉ nếu** B".

**3. *Điều kiện cần và đủ***

Khi mệnh đề $A \Leftrightarrow B$ đúng, ta có hai định lí $A \Rightarrow B$ và $B \Rightarrow A$.

Nếu ta gọi $A \Rightarrow B$ gọi là **định lí thuận** thì $B \Rightarrow A$ gọi là **định lí đảo**.

$B \Leftrightarrow A$ gọi là **định lí cần và đủ.**

Định lí $A \Leftrightarrow B$ thường được phát biểu dưới dạng:

- A là **điều kiện cần và đủ** để có B.
- B là **điều kiện cần và đủ** để có A.
- A **khi và chỉ khi** B.
- A **nếu và chỉ nếu** B.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.1:** Câu nào trong các câu sau là mệnh đề:

a) 3 + 2 = 7. b) 4 + x = 3.

c) x + y > 1. d) $2-\sqrt{5}<0$.

***Hướng dẫn giải***

Các câu a) và d) là mệnh đề.

Các câu b) và c) không là mệnh đề.

**Đề 1.2:** Phát biểu phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của chúng:

a) Phương trình $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ có nghiệm.

b) $\sqrt{3}>1,73$.

c) $\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2-3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+1=0$.

d) Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau.

***Hướng dẫn giải***

a) A = "Phương trình $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ có nghiệm"

$\overline{A}$ = "Phương trình $x^2+x+\frac{1}{4}=0$ vô nghiệm"

$\overline{A}$ là mệnh đề sai.

b) A = "$\sqrt{3}>1,73$"

$\overline{A}$ = "$\sqrt{3}\le 1,73$"

$\overline{A}$ là mệnh đề sai.

c) $A = \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2-3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+1=0$"

$\overline{A}$ = "$\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^2-3\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)+1\neq 0$"

$\overline{A}$ là mệnh đề sai.

d) A = "Hai đường chéo của hình chữ nhật bằng nhau".

$\overline{A}$ = "Hai đường chéo của hình chữ nhật không bằng nhau".

$\overline{A}$ là mệnh đề sai.

**Đề 1.3:** Xét tính đúng, sai của các mệnh đề.

a) $\sqrt{23}<5 \Rightarrow 2.\sqrt{23}<2.5$; b) $\sqrt{23}<5 \Rightarrow (-2).\sqrt{23}<(-2).5$;

c) $\pi<4 \Leftrightarrow \pi^2<16$; d) $-\pi<-2 \Leftrightarrow \pi^2<4$.

***Hướng dẫn giải***

a) Đúng, vì: $\sqrt{23}<5$ đúng và $2.\sqrt{23}<2.5$ đúng.

b) Sai, vì: $\sqrt{23}<5$ đúng và $(-2).\sqrt{23}<(-2).5$ sai.

c) Đúng vì cả hai mệnh đề "$\pi < 4 \Rightarrow \pi^2 < 16$" và "$\pi^2 < 16 \Rightarrow \pi < 4$" đều đúng.

d) Sai, vì mệnh đề "$-\pi < -2 \Rightarrow \pi^2 < 4$" sai .

** Chú ý:* Mệnh đề "$\pi^2 < 4 \Rightarrow -\pi < -2$" là mệnh đề đúng.

**Đề 1.4:** Xét mệnh đề:

Nếu a và b chia hết cho c thì a + b chia hết cho c

a) Phát biểu mệnh đề đảo và xét tính đúng sai của mệnh đề đảo.

b) Phát biểu mệnh đề trên, sử dụng khái niệm "điều kiện đủ".

c) Phát biểu mệnh đề trên, sử dụng khái niệm "điều kiện cần"

***Hướng dẫn giải***

a) Mệnh đề đảo: "Nếu a + b chia hết cho c thì a và b chia hết cho c". Đây là mệnh đề sai. (Xét ví dụ: a = 1 ; b = 3 ; c = 2)

b) Điều kiện đủ để a + b chia hết cho c là a và b chia hết cho c.

c) Điều kiện cần để a và b chia hết cho c là a + b chia hết cho c.

**Đề 1.5:** Xét mệnh đề: Một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 thì chia hết cho 9 và ngược lại.

Phát biểu mệnh đề trên, sử dụng khái niệm "điều kiện cần và đủ".

***Hướng dẫn giải***

Điều kiện cần và đủ để một số có tổng các chữ số chia hết cho 9 là số đó chia hết cho 9.

**Đề 1.6:** Chứng minh mệnh đề:

Nếu n là một số nguyên lẻ thì 3n + 1 là một số nguyên chẵn.

***Hướng dẫn giải***

n là số nguyên lẻ $\Rightarrow$ n = 2k + 1 (với k là một số nguyên)

$\Rightarrow$ 3n + 1 = 3(2k + 1) + 1 = 6k + 4

= 2(3k + 2) = 2k' (với k' là một số nguyên)

$\Rightarrow$ 3n + 1 là số nguyên chẵn.

*
**



# §2. MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN – KÍ HIỆU ∀, ∃

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Mệnh đề chứa biến

Xét câu p(n) = "n chia hết cho 3".

Đây không phải là một mệnh đề, nhưng với mỗi giá trị của n (thuộc tập số nguyên) ta được một mệnh đề. Chẳng hạn

p(4) = "4 chia hết cho 3" là một mệnh đề sai;

p(6) = "6 chai hết cho 3" là một mệnh đề đúng.

Ta nói p(n) là một mệnh đề chứa biến.

### II. Kí hiệu ∀ và kí hiệu ∃

Từ mệnh đề chứa biến p(n) = "n chia hết cho 3" ta có thể lập nên hai mệnh đề:

1. Mọi số nguyên n đều chia hết cho 3 (Mệnh đề sai).
2. Có số nguyên n chia hết cho 3 (Mệnh đề đúng).

Câu 1: được kí hiệu là $\forall n \in Z$: p(n). Kí hiệu $\forall$ gọi là kí hiệu phổ biến, có nghĩa là *với mọi.*

Câu 2: được kí hiệu là $\exists n \in Z$:p(n). Kí hiệu $\exists$ gọi là kí hiệu tồn tại, có nghĩa là *có* hoặc *tồn tại.*

### III. Phủ định của mệnh đề chứa các kí hiệu ∀, ∃

**1. *Phủ định của mệnh đề* $\exists x \in X : p(x)$**

Phủ định của mệnh đề A = "$\exists x \in X : p(x)$"

là $\overline{A}$ = "$\forall x \in X : \overline{p(x)}$"

**2. *Phủ định của mệnh đề* $\forall x \in X : p(x)$**

Phủ định của mệnh đề A = "$\forall x \in X : p(x)$"

là $\overline{A}$ = "$\exists x \in X : \overline{p(x)}$"

### IV. Chứng minh mệnh đề chứa kí hiệu ∀, ∃

**1. *Cách chứng minh mệnh đề* $\exists x \in X : p(x)$**

Để chứng minh mệnh đề này là đúng, ta chỉ cần chỉ ra một phần tử $x_0 \in X$ sao cho $p(x_0)$ là mệnh đề đúng.

*Ví dụ:* Chứng minh rằng $A = "\exists n \in Z : n = n^2"$ là mệnh đề đúng.

*Chứng minh:* Rõ ràng với n = 1 (hoặc n = 0) thì $n = n^2$. Vậy mệnh đề A đúng.

**2. *Cách chứng minh mệnh đề* $\forall x \in X : p(x)$**

Để chứng minh mệnh đề này là đúng, ta phải chỉ ra rằng p(x) trở thành mệnh đề đúng với tất cả các phần tử $x \in X$. Muốn vậy, ta chứng minh p(x) là mệnh đề đúng với phần tử bất kì $x \in X$.

*Ví dụ:* Chứng minh rằng: $A = "\forall x \in R : x^2 + x \geq -\frac{1}{4}"$ là mệnh đề đúng.

*Chứng minh:* Với số x bất kì, ta luôn có:

$$x^2 + x = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4} \geq -\frac{1}{4}\left(vi\left(x + \frac{1}{4}\right)^2 \geq 0\right)$$

Vậy mệnh đề A đúng.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.7:** Tìm x để các mệnh đề chứa biến sau đúng:

a) "x là số nguyên dương và $x^2 \leq 9$".

b) "x là số thực thỏa $x^2 - 6x + 5 = 0$".

***Hướng dẫn giải***

a) Trong các số nguyên dương, chỉ có các số 1; 2; và 3 thỏa $x^2 \leq 9$.
Vậy các số cần tìm là 1 ; 2; và 3.

b) Phương trình $x^2 - 6x + 5 = 0$ có hai nghiệm là x = 1 và x = 5.
Vậy các số cần tìm là 1 và 5.

**Đề 1.8:** Xét các mệnh đề chứa biến $p(x) = "x^2 - 1 = 0"$

$q(n) = "n \geq 3"$.

Phát biểu các mệnh đề $\forall x \in R$ :p(x);

$\exists x \in R : p(x); \forall n \in N : q(n); \exists n \in N : q(n)$

và xét tính đúng, sai của các mệnh đề đó.

***Hướng dẫn giải***

a) $"\forall x \in R : x^2 - 1 = 0"$. Đây là mệnh đề sai.

b) $"\exists x \in R : x^2 - 1 = 0"$. Đây là mệnh đề đúng.

c) $"\forall x \in N : n \geq 3"$. Đây là mệnh đề sai.

d) $"\exists x \in N : n \geq 3"$. Đây là mệnh đề đúng.



**Đề 1.9:** Dùng kí hiệu $\forall$, $\exists$ để viết các mệnh đề.

a) Mọi số nhân với 1 đều bằng chính nó.

b) Có một số cộng với chính nó bằng 0.

c) Mọi số cộng với số đối của nó đều bằng 0.

***Hướng dẫn giải***

a) $\forall x \in R : x.1 = x$.

b) $\exists x \in R : x + x = 0$

c) $\forall x \in R : x + (-x) = 0$.

**Đề 1.10:** Lập mệnh đề phủ định của các mệnh đề sau và xét tính đúng, sai của chúng:

a) $\forall n \in N$ :n chia hết cho n;

b) $\exists x \in Q : x^2 = 2$;

c) $\forall x \in R : x < x + 1$;

d) $\exists x \in R : 3x = x^2 + 1$.

***Hướng dẫn giải***

a) "$\exists n \in N$ : n không chia hết cho n". Đây là mệnh đề sai.

b) "$\forall x \in Q : x^2 \neq 2$". Đây là mệnh đề đúng.

c) "$\exists x \in R : x \geq x + 1$". Đây là mệnh đề sai.

d) "$\forall x \in R : 3x \neq x^2 + 1$". Đây là mệnh đề sai.

*
**

# §3. PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Để chứng minh mệnh đề P = "A⇒B" bằng phản chứng ta làm các bước sau:

1. Giả thiết rằng mệnh đề A đúng và mệnh đề B sai.
2. Dùng giả thiết và các kiến thức Toán học đã biết, bằng các lập luận suy ra mệnh đề A sai.
   Ta có mâu thuẫn (A vừa đúng, vừa sai).
3. Kết luận mệnh đề A⇒B đúng.
   Tổng quát, để chứng minh bằng phản chứng mệnh đề P là đúng, ta giả thiết P sai và bằng lập luận toán học suy ra một mâu thuẫn.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.11:** Chứng minh rằng nếu $n^2$ là một số chẵn thì n cũng là một số chẵn.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử n không là một số chẵn. Khi đó n là một số lẻ và có thể viết n = 2k + 1.

Từ đó suy ra: $n^2 = (2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$.

Điều đó chứng tỏ $n^2$ cũng là một số lẻ, mâu thuẫn với giả thiết. Mệnh đề được chứng minh.

**Đề 1.12:** Chứng minh $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

***Hướng dẫn giải***

Giả sử $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ. Khi đó $\sqrt{2}$ có thể viết dưới dạng một phân số tối giản: $\sqrt{2} = \frac{a}{b}; a, b \in Z$, nguyên tố cùng nhau.

Từ đẳng thức trên suy ra $b\sqrt{2} = a$ hay $2b^2 = a^2$. Điều đó chứng tỏ $a^2$ và do đó a là một số chẵn.

Đặt a = 2k, ta có: $2b^2 = a^2 = (2k)^2 = 4k^2$ hay $b^2 = 2k^2$.

Điều này lại chứng tỏ $b^2$ và do đó b là một số chẵn.

Từ giả thiết $\sqrt{2}$ là một số hữu tỉ suy ra có hai số nguyên chẵn a và b nguyên tố cùng nhau. Đó là một mâu thuẫn. Vậy $\sqrt{2}$ là một số vô tỉ.

*
**

# §4. TẬP HỢP

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Khái niệm tập hợp

***1. Tập hợp và phần tử***

Tập hợp (còn gọi là tập) là một khái niệm cơ bản của toán học.

Ta hiểu khái niệm tập hợp qua các ví dụ như: Tập hợp tất cả các học sinh lớp 10 của trường em, tập hợp các số nguyên tố,...

Thông thường, tập hợp gồm các phần tử có chung một hay một vài tính chất nào đó.



Để chỉ a là một phần tử tập hợp A ta viết $a \in A$ (đọc là a thuộc A).

Để chỉ a không phải là phần tử của tập hợp A, ta viết $a \notin A$ (đọc là a không thuộc A).

***2. Cách xác định tập hợp***

Ta có thể xác định tập hợp bằng một trong hai cách sau:

a) Liệt kê các phần tử của nó

*Ví dụ:* $A = \{1; 2; 3; 4; 5\}$.

b) Chỉ ra tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

*Ví dụ:* $B = \{x \in R / x^2 - 3x + 2 = 0\}$.

***3. Tập hợp rỗng***

Tập hợp rỗng, kí hiệu $\varnothing$, là tập hợp không chứa phần tử nào.

*Ví dụ:* $A = \{x \in R / x^2 + x + 1 = 0\}$.

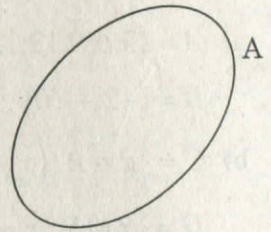
Vì phương trình $x^2 + x + 1 = 0$ vô nghiệm, nên A không chứa một phần tử nào.

Vậy A là một tập hợp rỗng.

* ***Ghi chú:*** $A \neq \varnothing \Leftrightarrow \exists x : x \in A$

***4. Biểu đồ Ven***

Các tập hợp có thể được minh họa trực quan bằng hình vẽ nhờ biểu đồ Ven do nhà toán học người Anh Giôn Ven (John Venn) lần đầu tiên đưa ra vào năm 1881. Trong biểu đồ Ven, những hình giới hạn bởi một đường khép kín như hình tròn, hình elip, hình chữ nhật... được dùng để biểu diễn tập hợp.




### II. Tập hợp con

Nếu mọi phần tử của A cũng là phần tử của B, thì ta nói A là một tập hợp con của B và viết $A \subset B$ (đọc là A chứa trong B).

$$A \subset B \Leftrightarrow (x \in A \Rightarrow x \in B)$$

Thay cho $A \subset B$, ta cũng viết $B \supset A$ (đọc là B chứa A hoặc B bao hàm A).

Nếu A không phải là tập con của B, ta viết $A \not\subset B$.

Dễ thấy các tính chất sau:

a) $A \subset A$ với mọi tập hợp A.

b) $A \subset B$ và $B \subset C$ thì $A \subset C$. Ta quy ước coi $\varnothing \subset A$ với mọi tập A.

**III. Tập hợp bằng nhau**

Khi $A \subset B$ và $B \subset C$ ta nói tập hợp A bằng tập hợp B và viết là A = B.

$$A = B \Leftrightarrow (x \in A \Leftrightarrow x \in B)$$

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.13**

a) Cho tập $A = \{x \in N / x \leq 20$ và x chia hết cho $3\}$

$$B = \{x \in R / x^2 (x+1)(x+2) = 0\}.$$

Hãy liệt kê các phần tử của A và B.

b) Cho tập $C = \{-\sqrt{2}; -1; 1; \sqrt{2}\}$

$$D = \{6; 24; 60; 120; 210\}.$$

Hãy xác định tập hợp C và D bằng tính chất đặc trưng cho các phần tử của nó.

***Hướng dẫn giải***

a) $A = \{3; 6; 9; 12; 15; 18\}$

$B = \{-2; -1; 0\}$.

b) $C = \{x \in R / (x^2 - 1)(x^2 - 2) = 0\}$

$D = \{x \in N / x = k(k+1)(k+2)$ với $k \in N$ và $1 \leq k \leq 5\}$

* *Ghi chú:* Có thể xác định tập D như sau:

$$D = \{x \in R / (x-6)(x-24)(x-60)(x-120)(x-210) = 0\}.$$

**Đề 1.14:** Trong các tập hợp sau, tập hợp nào là tập con của tập hợp nào?

A = Tập hợp các hình bình hành.

B = Tập hợp các hình vuông.

C = Tập hợp các hình chữ nhật.

D = Tập hợp các hình tứ giác.

***Hướng dẫn giải***

$$B \subset C \subset A \subset D.$$



**Đề 1.15:** Cho biết x là một phần tử của tập hợp A, xác định tính đúng, sai của các mệnh đề:

$$x \in A, \{x\} \in A, x \subset A, \{x\} \subset A.$$

***Hướng dẫn giải***

- $x \in A$: đúng ;
- $\{x\} \in A$: sai ;
- $x \subset A$ : sai ;
- $\{x\} \subset A$: đúng.

**Đề 1.16:** Xác định tất cả các tập hợp con của tập hợp

a) $A = \{a; b\}$.

b) $B = \{0; 1; 2\}$

***Hướng dẫn giải***

a) $\varnothing; \{a\}; \{b\}; \{a; b\}$.

b) $\varnothing; \{0\}; \{1\}; \{2\}; \{0; 1\}; \{0; 2\}; \{1; 2\}; \{0; 1; 2\}$.

**Đề 1.17:** Cho các tập hợp:

$$A = \{1; 2\}; B = \{x \in R / x^2 - 3x + 2 = 0\}$$

$$C = \{x \in N / x < 3\}.$$

Nêu mối quan hệ giữa các tập nói trên.

***Hướng dẫn giải***

Ta có:

- A = B.
- $A \subset C; B \subset C$.
- $C \not\subset A; C \not\subset B$.

*
**

# §5. CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Giao của hai tập hợp

**Giao** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cap B$, là tập hợp gồm các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B.

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \in B\}$$

$$x \in A \cap B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

### II. Hợp của hai tập hợp

**Hợp** của hai tập hợp A và B, kí hiệu $A \cup B$, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ hoặc } x \in B\}$$

$$x \in A \cup B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \in B \end{cases}$$

### III. Hiệu và phần bù

**Hiệu** của hai tập hợp A và B, kí hiệu A \ B, là tập hợp gồm các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

$$A \setminus B = \{x \mid x \in A \text{ và } x \notin B\}$$

$$x \in A \setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x \in A \\ x \notin B \end{cases}$$

Khi $B \subset A$ thì A\ B gọi là phần bù của B trong A, kí hiệu $C_A B$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.18:** Cho $A = \{1,2,3,4,5,6\}$; $B = \{2,4,6,8,10\}$.

Xác định $A \cap B; A \cup B; A \setminus B; B \setminus A$.

***Hướng dẫn giải***

$A \cap B = \{2,4,6\}$; $A \setminus B = \{1,3,5\}$;

$A \cup B = \{1,2,3,4,5,6,8,10\}$; $B \setminus A = \{8,10\}$.



**Đề 1.19:** Cho $A = \{1,2,3,4,5,6\}$, $B = \{x \in Z / -3 \le x \le 2\}$,

$C = \{x \in R / 2x^2 - 3x = 0\}$

a) Dùng phương pháp liệt kê phần tử xác định các tập hợp B và C.

b) Xác định các tập hợp sau: $A \cap B; B \cap C; A \cap C$.

c) Xác định các tập hợp sau: $A \cup B; B \cup C; A \cup C$.

d) Xác định các tập hợp sau: $A \setminus B; B \setminus C; A \setminus C$.

***Hướng dẫn giải***

a) $B = \{-3,-2,-1,0,1,2\}$

$C = \left\{0, \frac{3}{2}\right\}$

b) Ta có: $A \cap B = \{1,2\}$

$B \cap C = \{0\}$

$A \cap C = \varnothing$

c) $A \cup B = \{-3,-2,-1,0,1,2,3,4,5,6\}$

$B \cup C = \left\{-3,-2,-1,0,1,2,\frac{3}{2}\right\}$

$A \cup C = \left\{0,1,2,3,4,5,6,\frac{3}{2}\right\}$

d) $A \setminus B = \{3,4,5,6\}$

$B \setminus C = \{-3,-2,-1,1,2\}$

$A \setminus C = \{1,2,3,4,5,6\}$.

**Đề 1.20:** Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề:

a) $A \subset A \cup B$.

b) $A \subset A \cap B$

c) $A \cap B \subset B$

d) $A \cup B \subset B$

e) $A \cap B \subset A \cup B$

f) $A \setminus B \subset B$

g) $A \setminus B \subset A$

h) $A = A \setminus B \cup (A \cap B)$

***Hướng dẫn giải***

a) Đúng b) Sai c) Đúng d) Sai

e) Đúng f) Sai g) Đúng h) Đúng.

* *Ghi chú:* Học sinh có thể dùng biểu đồ Ven để kiểm chứng.

**Đề 1.21:** Cho $A = \{1,3,5,7,9\}$, $B = \{1,3,5\}$.

Xác định $C_A B$.

***Hướng dẫn giải***

$C_A B = \{7,9\}$

THƯ VIỆN TỈNH BÌNH THUẬN

**Đề 1.22:** Cho A, B là hai tập hợp. Hãy xác định:

a) $(A \setminus B) \cap A$; b) $(A \setminus B) \cap B$.

***Hướng dẫn giải***

a) $(A \setminus B) \cap A = A \setminus B$; b) $(A \setminus B) \cap B = \varnothing$.

*
**

# §6. CÁC TẬP HỢP SỐ

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Các tập hợp số đã học

Chúng ta đã biết tập hợp số nguyên dương $N^*$, tập hợp số tự nhiên N, tập hợp số nguyên Z, tập hợp số hữu tỉ Q và tập hợp số thực R. Phần bù của tập hợp Q trong tập hợp R là tập hợp các số vô tỉ.

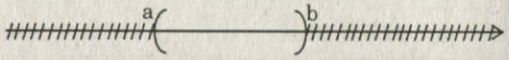
Ta có quan hệ sau đây:

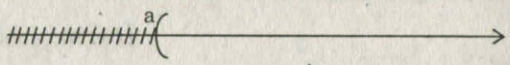
$$N^* \subset N \subset Z \subset Q \subset R$$

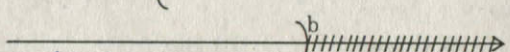
### II. Các tập hợp con thường dùng của R

Trong toán học ta thường gặp các tập hợp con sau đây của tập các số thực R.

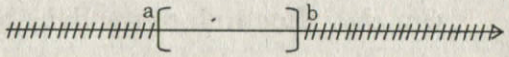
❖ Khoảng:

(a ; b) = $\{x \in R \mid a < x < b\}$ 

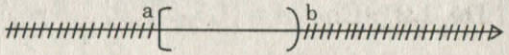

$(a;+\infty) = \{x \in R \mid a < x\}$ 

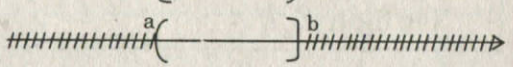

$(-\infty;b) = \{x \in R \mid x < b\}$ 

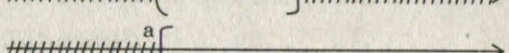

❖ Đoạn:

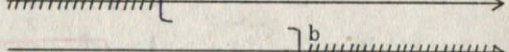
$[a;b] = \{x \in R \mid a \le x \le b\}$ 


❖ Nửa khoảng:

$[a;b) = \{x \in R \mid a \le x < b\}$ 


$(a;b] = \{x \in R \mid a < x \le b\}$ 


$[a;+\infty) = \{x \in R \mid a \le x\}$ 


$(-\infty;b] = \{x \in R \mid x \le b\}$ 




'Kí hiệu $+\infty$ đọc là dương vô cực, kí hiệu $-\infty$ đọc là âm vô cực. Ta có thể viết $R = (-\infty;+\infty)$ và gọi là khoảng $(-\infty;+\infty)$. Vậy $-\infty < x < +\infty$ với mọi $x \in R$.

Quy ước viết: $R_+ = [0;+\infty), R_- = (-\infty;0]$, $R^* = \{x \in R \mid x \ne 0\}$

$R_+^* = (0;+\infty), R_-^* = (-\infty;0)$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

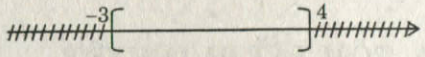
**Đề 1.23:** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

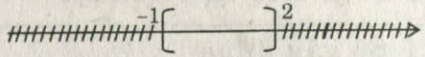
a) $[-3;1) \cup (0;4]$ b) $(0;2] \cup [-1;1)$

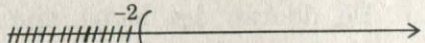
c) $(-2;15) \cup (3;+\infty)$ d) $\left(-1;\frac{4}{3}\right) \cup [-1;2)$

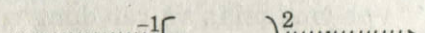
e) $(-\infty;1) \cup (-2;+\infty)$.

***Hướng dẫn giải***

a) $[-3;1) \cup (0;4) = [-3;4]$ 


b) $(0;2] \cup [-1;1) = [-1;2]$ 


c) $(-2;15) \cup (3;+\infty) = (-2;+\infty)$ 


d) $\left(-1;\frac{4}{3}\right) \cup [-1;2) = [-1;2)$ 

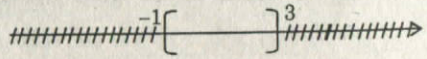

e) $(-\infty;1) \cup (-2;+\infty) = (-\infty;+\infty)$ 

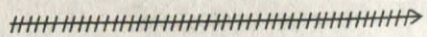
**Đề 1.24:** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

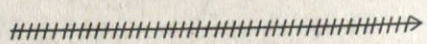
a) $(-12;3] \cap [-1;4]$ b) $(4;7) \cap (-7;-4)$

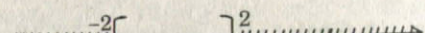
c) $(2;3) \cap [3;5)$ d) $(-\infty;2] \cap [-2;+\infty)$

***Hướng dẫn giải***

a) $(-12;3] \cap [-1;4] = [-1;3]$ 


b) $(4;7) \cap (-7;-4) = \varnothing$ 

c) $(2;3) \cap [3;5) = \varnothing$ 

d) $(-\infty;2] \cap [-2;+\infty) = [-2;2]$ 

**Đề 1.25:** Xác định các tập hợp sau và biểu diễn chúng trên trục số:

a) $(-2;3)\setminus(1;5)$ b) $(-2;3)\setminus[1;5)$

c) $R\setminus(2;+\infty)$ d) $R\setminus(-\infty;3]$

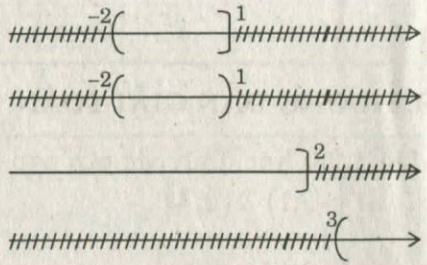
***Hướng dẫn giải***

a) $(-2;3)\setminus(1;5)=(-2;1]$

b) $(-2;3)\setminus[1;5)=(-2;1)$

c) $R\setminus(2;+\infty)=(-\infty;2]$

d) $R\setminus(-\infty;3]=(3;+\infty)$




*
**

# §7. SỐ GẦN ĐÚNG – SAI SỐ

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Số gần đúng

Để đo các đại lượng như bán kính đường xích đạo Trái Đất, khoảng cách từ Trái Đất đến các vì sao,... người ta phải dùng các phương pháp và các dụng cụ đo đặc biệt. Kết quả của phép đo phụ thuộc vào phương pháp đo và vào dụng cụ được sử dụng, vì thế không phải là những số đúng.

*Trong đo đạc, tính toán ta thường chỉ nhận được những số gần đúng.*

### II. Sai số tuyệt đối

Nếu $a$ là số gần đúng của $\overline{a}$ thì $\Delta_a=|\overline{a}-a|$ được gọi là sai số tuyệt đối của số gần đúng a.

Nếu $\Delta_a=|\overline{a}-a|\le h$ ta nói h là một **cận trên** của sai số tuyệt đối của a, và a là số gần đúng của $\overline{a}$ với **độ chính xác** h. Lúc đó $a-h\le\overline{a}\le a+h$ và ta viết $\overline{a}=a\pm h$.

### III. Sai số tương đối

Tỉ số: $\delta_a=\dfrac{\Delta_a}{|a|}=\dfrac{|\overline{a}-a|}{|a|}$ gọi là sai số tương đối của số gần đúng a.

* ***Chú ý:*** Sai số tương đối thường được biểu thị dưới dạng phần trăm.



## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.26:** Cho ba giá trị gần đúng của $\dfrac{3}{7}$ là 0,429; 0,4 ; và 0,42. Hãy tính sai số tuyệt đối của các số này.

***Hướng dẫn giải***

❖ Sai số tuyệt đối của 0,429 là:

$$\Delta_1=\left|\frac{3}{7}-0,429\right|=\left|\frac{3-3,003}{7}\right|=\frac{0,003}{7}<0,001.$$

Sai số tuyệt đối của 0,429 không vượt quá 0,001.

❖ Sai số tuyệt đối của 0,4 là:

$$\Delta_2=\left|\frac{3}{7}-0,4\right|=\left|\frac{3-0,28}{7}\right|=\frac{0,2}{7}<0,1.$$

Sai số tuyệt đối của 0,4 không vượt quá 0,1.

❖ Sai số tuyệt đối của 0,42 là:

$$\Delta_3=\left|\frac{3}{7}-0,42\right|=\left|\frac{3-2,94}{7}\right|=\frac{0,06}{7}<0,01.$$

Sai số tuyệt đối của 0,42 không vượt quá 0,01.

**Đề 1.27:** Tính chu vi của đường tròn bán kính 5cm và ước lượng sai số tuyệt đối của kết quả.

***Hướng dẫn giải***

❖ Gọi $\overline{C}$ là chu vi và R là bán kính của đường tròn.

Ta có: $\overline{C}=2\pi R=2.\pi.5=10\pi(cm)$.

Lấy $\pi=3,14$.

Ta có: C = 10.3,14 = 31,4 (cm).

❖ Ước lượng sai số tuyệt đối:

Ta có: $3,14<\pi<3,15\Rightarrow 10.3,14.5<10.\pi<10.3,15$

$$\Rightarrow 31,4<\overline{C}<31,5$$

$$\Rightarrow|\overline{C}-31,4|<|31,5-31,4|=0,1$$

Vậy sai số tuyệt không vượt quá 0,1.

**Đề 1.28:** Tính cạnh huyền của một tam giác vuông cân có cạnh góc vuông là 2cm và xác định độ chính xác của kết quả.

***Hướng dẫn giải***

❖ Gọi d là cạnh huyền và a là cạnh góc vuông của một tam giác vuông cân.

Ta có: $\bar{d} = a\sqrt{2} = 2\sqrt{2}(cm)$

Lấy $\sqrt{2} = 1,41$.

Ta có: $d = 2.1,41 = 2,82(cm)$.

❖ Xác định độ chính xác:

Ta có: $1,41 < \sqrt{2} < 1,42 \Rightarrow 2.1,41 < 2\sqrt{2} < 2.1,42$

$\Rightarrow 2,82 < \bar{d} < 2,84$

$\Rightarrow |\bar{d} - 2,82| < |2,84 - 2,82| = 0,02$

hay $|\bar{d} - 2,82| \le 0,02$.

Vậy d = 2,82(cm) là giá trị đúng của cạnh huyền với độ chính xác 0,02.

**Đề 1.29:** Cho $\bar{a} = \frac{1}{1+x}; (0 < x < 1)$. Giả sử ta lấy số a = 1 – x làm giá trị gần đúng của $\bar{a}$. Hãy tính sai số tương đối của a theo x.

***Hướng dẫn giải***

❖ Ta có: sai số tương đối là:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{|\bar{a} - a|}{|a|} = \frac{\left|\frac{1}{1+x} - (1-x)\right|}{|1-x|} = \frac{x^2}{1-x}$$

(vì 0 < x < 1 nên 1 – x > 0)

Vậy: $\delta_a = \frac{x^2}{1-x}$.

**Đề 1.30:** Mặt Trăng quay một vòng quanh Trái Đất hết 27,32 ngày. Nếu nói Mặt Trăng quay quanh Trái Đất một vòng hết 27 ngày thì sai số tương đối mắc phải là bao nhiêu?

***Hướng dẫn giải***

Sai số tương đối mắc phải là:

$$\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} = \frac{|\bar{a} - a|}{|a|} = \frac{|27,32 - 27|}{27}$$

$$= \frac{0,32}{27} = \frac{8}{675} \text{ hay } 11^0/_{00}$$



**Đề 1.31:** Người ta đo được độ cao của một ngọn núi là 1352m với sai số tương đối là $3^0/_{00}$. Hãy ước lượng sai số tuyệt đối của phép đo.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\delta_a = \frac{\Delta_a}{|a|} \Rightarrow 0,003 = \frac{\Delta_a}{1352}$

$\Rightarrow \Delta_a = 0,003.1352 = 4,056 < 4,1$.

Vậy sai số tuyệt đối của phép đo không vượt quá 4,1.

*
**

# §8. CÁCH VIẾT SỐ GẦN ĐÚNG

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Chữ số đáng tin (chữ số chắc)**

Chữ số k của số gần đúng a được gọi là chữ số đáng tin (hay chữ số chắc) nếu sai số tuyệt đối $\Delta_a$ không vượt quá một đơn vị của hàng có chữ số k đó.

* ***Chú ý:*** Theo định nghĩa, nếu k là một chữ số đáng tin thì tất cả các chữ số đứng bên trái của nó cũng là chữ số đáng tin.

**II. Cách viết chuẩn số gần đúng**

Cách viết chuẩn số gần đúng dưới dạng số thập phân là cách viết trong đó mọi chữ số đều là chữ số chắc. Nếu ngoài các chữ số chắc còn có những chữ số khác thì phải làm tròn đến hàng thấp nhất có chữ số chắc.

**III. Các phép toán về số gần đúng**

***1. Sai số tuyệt đối của một tổng hay hiệu hai số gần đúng***

Nếu a, b là hai số gần đúng với sai số tuyệt đối tương ứng là $\Delta_a$ và $\Delta_b$ thì a + b, a – b là những số gần đúng với sai số tuyệt đối không vượt quá $\Delta_a + \Delta_b$.

***2. Sai số tương đối của tích hay thương hai số gần đúng***

Nếu a, b là hai số gần đúng với sai số tương đối tương ứng là $\delta_a$ và $\delta_b$ thì sai số tương đối của a.b và $\frac{a}{b}$ không vượt quá $\delta_a + \delta_b$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 1.32:** Trong 6 lần đo chiều dài một con đường, người ta được các kết quả 4577m, 4581m, 4574m , 4580m, 4575m và 4578m. Hãy xác định độ dài con đường, sai số tuyệt đối và chữ số chắc của kết quả.

***Hướng dẫn giải***

Độ dài con đường là:

$$\frac{1}{6}(4577+4581+4574+4580+4575+4578)=4577,5m$$

Độ chênh lệch lớn nhất giữa số 4577,5m và các kết quả đo đạc là:

$$|4581-4577,5|=3,5$$

Nên sai số tuyệt đối là 3,5 < 10.

Các chữ số chắc của kết quả là 4, 5, 7.

**Đề 1.33:** Một vật thể có thể tích $V=180,57cm^3\pm0,05cm^3$. Xác định số chữ số chắc và sai số tương đối của giá trị gần đúng ấy.

***Hướng dẫn giải***

Sai số tuyệt đối là 0,05 < 0,1. Các chữ số chắc là 1, 8, 0, 5.

Sai số tương đối mắc phải:

$$\delta_V=\frac{\Delta_V}{V}=\frac{0,05}{180,57}=\frac{5}{18057}<0,0003.$$

**Đề 1.34:** Trong số liệu thống kê dân số Hà Nội a = 2841657 chỉ có các chữ số hàng nghìn trở lên là chữ số chắc. Viết chuẩn số gần đúng a.

***Hướng dẫn giải***

$a=2842.10^3$ người.

**Đề 1.35:** Số gần đúng a = 2,18725 có 4 chữ số chắc. Viết số a dưới dạng chuẩn.

***Hướng dẫn giải***

a = 2,187.

**Đề 1.36:** Một tam giác có các cạnh đo được như sau:

$a=6,3cm\pm0,1cm, b=10cm\pm0,2cm, c=15cm\pm0,3cm$.

Tính chu vi của tam giác, sai số tuyệt đối và sai số tương đối mắc phải.

***Hướng dẫn giải***

Chu vi của tam giác là:

$$2p=(6,3+10+15)=31,3(cm)$$



Sai số tuyệt đối là:

$$\Delta_{2p}=\Delta_a+\Delta_b+\Delta_c=0,1+0,2+0,3=0,6(cm).$$

Sai số tương đối mắc phải:

$$\delta_{2p}=\frac{\Delta_{2p}}{2p}=\frac{0,6}{31,3}=0,019...<0,02.$$

**Đề 1.37:** Một hình hộp chữ nhật có kích thước $x=3m\pm1cm$, $y=5m\pm2cm$, $z=4m\pm2cm$. Xác định thể tích, sai số tuyệt đối, sai số tương đối và số chữ số chắc của kết quả.

***Hướng dẫn giải***

Thể tích của hình hộp chữ nhật là:

$$V=3.5.4=60(m^3).$$

Sai số tương đối ứng với các cạnh là:

$$\delta_x=\frac{\Delta_x}{|x|}=\frac{1}{300};\delta_x=\frac{\Delta_y}{|y|}=\frac{2}{500}=\frac{1}{250};\delta_z=\frac{\Delta_z}{|z|}=\frac{2}{400}=\frac{1}{200}.$$

Vậy sai số tương đối ứng với thể tích là:

$$\delta_v=\delta_x+\delta_y+\delta_z=\frac{1}{300}+\frac{1}{250}+\frac{1}{200}=\frac{37}{3000}.$$

Sai số tuyệt đối mắc phải là:

$$\Delta_v=V.\delta_V=60.\frac{37}{3000}=0,74<1.$$

Vậy $V=60m^3\pm0,74m^3$ và V có hai chữ số chắc.

*
**

# TOÁN TRẮC NGHIỆM

## ĐỀ 1: MỆNH ĐỀ – MỆNH ĐỀ CHỨA BIẾN – KÍ HIỆU ∀, ∃

**1.** Trong các câu sau, câu nào không phải là mệnh đề:

a) Huế là một thành phố ở Miền Nam.

b) Sông Hồng chảy qua thủ đô Hà Nội.

c) 27 + 3 = 10.

d) Sáng nay bạn có đi học không?

**2.** Cho mệnh đề "phương trình $x^2-4x+4=0$ có nghiệm". Hãy tìm mệnh đề phủ định và tính đúng, sai của nó.

a) Phương trình $x^2-4x+4=0$ có nghiệm kép. Đây là mệnh đề đúng.

b) Phương trình $x^2-4x+4=0$ có nghiệm kép. Đây là mệnh đề sai.

c) Phương trình $x^2-4x+4=0$ vô nghiệm. Đây là mệnh đề đúng.

d) Phương trình $x^2-4x+4=0$ vô nghiệm. Đây là mệnh đề sai.

**3.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào sai?

a) $\sqrt{15}\le 4$ b) $2.\sqrt{15}>2.4$

c) $\sqrt{7}<3\Leftrightarrow 7<9$ d) $\pi<3\Leftrightarrow \pi^2<9$.

**4.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) Nếu $a\ge b$ thì $a^2\ge b^2$.

b) Nếu một tam giác có một góc bằng $60^0$ thì tam giác đó là tam giác đều.

c) Nếu a chia hết cho 9 thì a chia hết cho 3.

d) Để một tứ giác là hình chữ nhật, điều kiện cần và đủ là tứ giác đó có hai đường chéo bằng nhau.

**5.** Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào có mệnh đề đảo đúng?

a) Nếu a và b chia hết cho c thì a + b chia hết cho c.

b) Nếu hai tam giác bằng nhau thì có diện tích bằng nhau.

c) Nếu a chia hết cho 3 thì a chia hết cho 9.

d) Nếu một số có tận cùng bằng 0 thì số đó chia hết cho 5.

**6.** Tìm x để mệnh đề chứa biến sau đúng: "$x^3-3x^2+2x=0$"

a) x = 0 ; x = 2 ; b) x = 0 ; x = 3 ;

c) x = 0 ; x = 2; x = 3 d) x = 0 ; x = 1 ; x = 2.

**7.** Cho hai mệnh đề: A = "$\forall x\in R: x^2-1\ne 0$"

B = "$\exists n\in Z: n=n^2$"

Xét tính đúng sai của hai mệnh đề A và B.

a) A đúng, B sai b) A sai, B đúng.

c) A, B đều đúng d) A, B đều sai.

**8.** Cho mệnh đề A = "$\forall x\in R: x^2+x\ge -\frac{1}{4}$" Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề A và xét tính đúng sai của nó.

a) $\overline{A}=$"$\exists x\in R: x^2+x\ge -\frac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.

b) $\overline{A}=$"$\exists x\in R: x^2+x\le -\frac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.



c) $\overline{A}=$"$\exists x\in R: x^2+x<-\frac{1}{4}$". Đây là mệnh đề đúng.

d) $\overline{A}=$"$\exists x\in R: x^2+x<-\frac{1}{4}$". Đây là mệnh đề sai.

**9.** Cho mệnh đề $A=$"$\exists n\in N: 3n+1$ là số lẻ". Lập mệnh đề phủ định của mệnh đề A và xét tính đúng sai của nó.

a) $\overline{A}=$"$\forall n\in N: 3n+1$ là số lẻ". Đây là mệnh đề đúng.

b) $\overline{A}=$"$\forall n\in N: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề sai.

c) $\overline{A}=$"$\exists n\in N: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề sai.

d) $\overline{A}=$"$\exists n\in N: 3n+1$ là số chẵn". Đây là mệnh đề đúng.

**10.** Cho mệnh đề $A=$"$\exists x\in R: x^2<x$". Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào là phủ định của mệnh đề $\overline{A}$.

a) "$\exists x\in R: x^2<x$". b) "$\exists x\in R: x^2\ge x$".

c) "$\forall x\in R: x^2<x$". d) "$\forall x\in R: x^2\ge x$".

## ĐỀ 2: PHƯƠNG PHÁP CHỨNG MINH BẰNG PHẢN CHỨNG - TẬP HỢP

**1.** Khi chứng minh $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ, một học sinh làm như sau:

I. Giả sử $\sqrt{3}$ là một số hữu tỉ. Khi đó $\sqrt{3}$ có thể viết dưới dạng một phân số tối giản: $\sqrt{3}=\frac{a}{b}; a,b\in Z$ nguyên tố cùng nhau.

II. Từ đẳng thức trên suy ra $a=\sqrt{3}b$ hay $a^2=3b^2$. Điều đó chứng tỏ $a^2$ và do đó a chia hết cho 3.

Đặt: a = 3k.

Ta có: $a^2=3b^2\Rightarrow 9k^2=3b^2\Rightarrow b^2=3k^2\Rightarrow b^2$ và do đó b chia hết cho 3. Đặt: b = 3k'

III. Vì a = 3k và b = 3k' nên phân số $\frac{a}{b}$ không là phân số tối giản.

Đó là một mâu thuẫn. Vậy $\sqrt{3}$ là một số vô tỉ.

* *Cách giải trên:*

a) Sai từ bước I b) Sai từ bước II.

c) Sai ở bước III d) Cả ba bước I, II, III đều đúng.

**2.** Cho tập hợp $A=\left\{x\in R/\left(x^2-1\right)\left(x^2+2\right)=0\right\}$. Hãy liệt kê các phần tử của A.

a) $A=\{-1;1\}$ b) $A=\left\{-\sqrt{2};-1;1;\sqrt{2}\right\}$.

c) $A=\{-1\}$ d) $A=\{1\}$.

**3.** Kí hiệu nào sau đây để chỉ 5 là một số tự nhiên.

a) $5 \subset N$ b) $5 \in N$ c) $5 \notin N$ d) 5 = N.

**4.** Cho $A = \{1;2;3\}$. Trong các khẳng định sau, khẳng định nào sai?

a) $\varnothing \subset A$ b) $1 \in A$ c) $\{1;2\} \subset A$ d) 2 = A.

**5.** Kí hiệu nào sau đây để chỉ $\sqrt{3}$ không là số hữu tỉ.

a) $\sqrt{3} \neq Q$ b) $\sqrt{3} \not\subset Q$.

c) $\sqrt{3} \notin Q$ d) Một kí hiệu khác.

**6.** Trong các tập sau, tập nào khác rỗng?

a) $A = \{x \in R / x^2 + x + 1 = 0\}$ b) $B = \{x \in N / x^2 - 2 = 0\}$

c) $C = \{x \in Z / (x^3 - 3)(x^2 + 1) = 0\}$ d) $D = \{x \in Q / x(x^2 + 3) = 0\}$.

**7.** Cho tập $A = \{a,b,c,d\}$. Tập A có mấy tập con?

a) 16 b) 15 c) 12 d) 10.

**8.** Mệnh đề nào sau đây tương đương với mệnh đề $A \neq \varnothing$.

a) $\forall x : x \in A$ b) $\exists x : x \in A$.

c) $\exists x : x \notin A$ d) Một mệnh đề khác.

**9.** Cho các mệnh đề sau:

I. $\{5;0;-5\} = \{-5;0;5\}$.

II. $\varnothing \subset \varnothing$.

III. $\varnothing \in \{\varnothing\}$.

Trong các mệnh đề trên, mệnh đề nào đúng?

a) Chỉ I đúng. b) Chỉ I và II đúng.

c) Chỉ II và III đúng. d) Cả I, II, III đều đúng.

**10.** Trong các tập sau, tập nào có đúng một tập con?

a) $\varnothing$ b) $\{a\}$ c) $\{\varnothing\}$ d) $\{\varnothing;a\}$.

## ĐỀ 3: CÁC PHÉP TOÁN TRÊN TẬP HỢP – CÁC TẬP HỢP SỐ

**1.** Cho hai tập hợp $A = \{1;2;3;4\}$; $B = \{2;4;6;8\}$.

Tập hợp nào sau đây bằng tập hợp $A \cap B$?

a) $\{2;4\}$ b) $\{1;2;3;4;6;8\}$ c) $\{6;8\}$ d) $\{1;3\}$



**2.** Cho hai tập hợp $A = \{1;2;3;7\}$; $B = \{2;4;6;7;8\}$.

Khẳng định nào sau đây là đúng?

a) $A \cap B = \{2;7\}; A \cup B = \{4;6;8\}$

b) $A \cap B = \{2;7\}; A \setminus B = \{1;3\}$

c) $A \setminus B = \{1;3\}; B \setminus A = \{2;7\}$

d) $A \setminus B = \{1;3\}; A \cup B = \{1;3;4;6;8\}$.

**3.** Cho hai tập hợp: $A = \{x / x$ là ước số nguyên dương của $12\}$

$B = \{x / x$ là ước số nguyên dương của $18\}$

Hãy liệt kê các phần tử của tập hợp $A \cap B$.

a) $\{0;1;2;3;6\}$ b) $\{1;2;3;4\}$

c) $\{1;2;3;6\}$ d) $\{1;2;3\}$

**4.** Cho hai tập hợp $A = \{0;1;2;3;4\}$; $B = \{1;2;3\}$.

Hãy tìm mệnh đề sai, trong các mệnh đề sau:

a) $A \cap B = B$ b) $A \cup B = A$.

c) $C_A B = \{0;4\}$ d) $B \setminus A = \{0;4\}$

**5.** Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp:

$A = \{x \in R / f(x) = 0\}$

$B = \{x \in R / g(x) = 0\}$

$C = \{x \in R / f^2(x) + g^2(x) = 0\}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) $C = A \cup B$ b) $C = A \cap B$

c) $C = A \setminus B$ d) $C = B \setminus A$.

**6.** Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp:

$A = \{x \in R / f(x) = 0\}$

$B = \{x \in R / f(x) = 0\}$

$C = \{x \in R / f(x).g(x) = 0\}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) $C = A \cup B$ b) $C = A \cap B$

c) $C = A \setminus B$ d) $C = B \setminus A$.

**7.** Cho hai đa thức $f(x)$ và $g(x)$. Xét các tập hợp:

$A = \{x \in R / f(x) = 0\}$

$B = \{x \in R / g(x) = 0\}$

$C = \left\{x \in R / \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0\right\}$

Trong các mệnh đề sau, mệnh đề nào đúng?

a) $C = A \cup B$ b) $C = A \cap B$

c) $C = A \setminus B$ d) $C = B \setminus A$.

**8.** Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a) $(-3;2) \cap (1;4) = (1;2)$ b) $[-1;5] \cup (2;6] = [-1;6]$

c) $R \setminus [1;+\infty) = (-\infty;1)$ d) $R \setminus [-3;+\infty) = (-\infty;-3]$.

**9.** Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a) $[-1;7] \cap (7;10) = \varnothing$ b) $[-2;4) \cup [4;+\infty) = [-2;+\infty)$

c) $[-1;5] \setminus (0;7) = [-1;0)$ d) $R \setminus (-\infty;3] = (3;+\infty)$.

**10.** Tìm mệnh đề sai trong các mệnh đề sau:

a) $(-\infty;3) \cup [3;+\infty) = R$ b) $R \setminus (-\infty;0] = R_+^*$

c) $R \setminus (0;+\infty) = R_-$ d) $R \setminus (0;+\infty] = R_-^*$.

## ĐỀ 4: SỐ GẦN ĐÚNG – CÁCH VIẾT SỐ GẦN ĐÚNG

**1.** Cho giá trị gần đúng của $\dfrac{23}{7}$ là 3,28. Hãy tìm sai số tuyệt đối của 3,28.

a) 0,04 b) $\dfrac{0,04}{7}$ c) 0,006 d) Một đáp số khác.

**2.** Trong số gần đúng a dưới đây có bao nhiêu chữ số chắc.

a = 174325 với $\Delta_a = 17$.

a) 6 b) 5 c) 4 d) 3.

**3.** Cho số a = 1754731, trong đó chỉ có các chữ số hàng trăm trở lên là đáng tin. Hãy viết chuẩn số gần đúng a.

a) $17547.10^2$ b) $17548.10^2$ c) $1754.10^3$ d) $1755.10^3$.

**4.** Số gần đúng a = 2,5765 có ba chữ số đáng tin viết dưới dạng chuẩn là:

a) 2,57 b) 2,576 c) 2,58 d) 2,577.



**5.** Trái Đất quay một vòng quanh Mặt Trời là 365 ngày. Kết quả này có độ chính xác là $\dfrac{1}{4}$ ngày. Hãy tính sai số tương đối.

a) $\dfrac{1}{4}$ b) $\dfrac{1}{365}$ c) $\dfrac{1}{1460}$ d) Một đáp số khác.

**6.** Một hình chữ nhật có các cạnh: $x = 4,2m \pm 1cm$ ; $y = 7m \pm 2cm$. Hãy tính chu vi của hình chữ nhật và sai số tuyệt đối của giá trị đó.

a) 22,4m và 3cm b) 22,4m và 1cm.

c) 22,4m và 2cm d) 22,4m và 6cm.

**7.** Một hình chữ nhật có các cạnh: $x = 4,2 \pm 1cm$ ; $y = 7m \pm 2cm$. Hãy tính chu vi hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó.

a) 22,4m và $\dfrac{1}{2240}$ b) 22,4m và $\dfrac{6}{2240}$.

c) 22,4m và 6cm d) Một đáp số khác.

**8.** Trong một thí nghiệm hằng số C được xác định là 5,73675 với cận trên sai số tuyệt đối là d = 0,00421. Viết chuẩn giá trị gần đúng của C.

a) 5,74 b) 5,736 c) 5,737 d) 5,7368.

**9.** Một hình chữ nhật có các cạnh: $x = 2m \pm 1cm$ ; $y = 5m \pm 2cm$. Hãy tính diện tích hình chữ nhật và sai số tương đối của giá trị đó.

a) $10m^2$ và $5^0/_{00}$ b) $10m^2$ và $4^0/_{00}$.

c) $10m^2$ và $9^0/_{00}$ d) $10m^2$ và $20^0/_{00}$.

**10.** Một hình chữ nhật có các cạnh: $x = 2m \pm 1cm$ ; $y = 5m \pm 2cm$. Hãy tính diện tích hình chữ nhật và sai số tuyệt đối của giá trị đó.

a) $10m^2$ và $900cm^2$ b) $10m^2$ và $500cm^2$.

c) $10m^2$ và $400cm^2$ d) $10m^2$ và $2000cm^2$.

## ĐỀ 5: ÔN TẬP CHƯƠNG I

**1.** Hãy điền vào ô trống (...)

a) Cho A là mệnh đề đúng. Khi đó: Nếu B đúng thì A $\Rightarrow$ B là mệnh đề...

b) Cho A là mệnh đề đúng. Khi đó: Nếu B sai thì A $\Rightarrow$ B là mệnh đề...

c) Trong các định lí có dạng A $\Rightarrow$ B. Thì A là điều kiện... để có B.

d) Trong các định lí có dạng A $\Rightarrow$ B. Thì B là điều kiện... để có A.

**2.** Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng của các mệnh đề:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $\sqrt{13} \le 4$ | | |
| b) $\sqrt{2} > 2 \Rightarrow 3.\sqrt{2} > 6$ | | |
| c) $\pi < 4 \Leftrightarrow \pi^2 < 16$ | | |
| d) $\sqrt{12} < 4 \Rightarrow -\sqrt{12} < -4$ | | |

**3.** Ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được một khẳng định đúng.

| | |
|---|---|
| a) Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in X : p(x)$" | A) là mệnh đề: "$\forall x \in X : p(x)$" |
| b) Phủ định của mệnh đề: "$\forall x \in X : p(x)$" | B) là mệnh đề: "$\exists x \in X : \overline{p(x)}$" |
| c) Phủ định của mệnh đề: "$\exists x \in X : \overline{p(x)}$" | C) là mệnh đề: "$\exists x \in X : p(x)$" |
| d) Phủ định của mệnh đề: "$\forall x \in X : \overline{p(x)}$" | D) là mệnh đề: "$\forall x \in X : \overline{p(x)}$" |

**4.** Cho $A = \{1,2,3,4,5\}, B = \{2,4,6\}$. Lấy các tập ở cột 2 đặt vào vị trí... ở cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) $A \cup B =$... | A) $\{2;4\}$ |
| b) $A \cap B =$... | B) $\{6\}$ |
| c) A \ B =... | C) $\{1;2;3;4;5;6\}$ |
| d) B \ A =... | D) $\{1;3;5\}$ |

**5.** Cho $A = \{0;1;2;3;4\}, B = \{-1;0;1;2\}$. Xác định tính đúng, sai của các khẳng định sau:

| Khẳng định | Đ | S |
|---|---|---|
| $A \cup B = \{0;1;2\}$ | | |
| $A \cap B = \{-1;0;1;2;3;4\}$ | | |
| $\varnothing \subset A$ | | |
| $B \not\subset A$ | | |



**6.** Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $A \subset A \cup B$ | | |
| b) $A \cap B \subset B$ | | |
| c) $A \setminus B \subset A$ | | |
| d) $A \cap B \subset A \cup B$ | | |

**7.** Điền vào chỗ trống (...) để được các định nghĩa đúng.

a) ... của hai tập A và B là tập hợp các phần tử vừa thuộc A, vừa thuộc B.

b) ... của hai tập A và B là tập hợp các phần tử thuộc A hoặc thuộc B.

c) ... của hai tập A và B là tập hợp các phần tử thuộc A nhưng không thuộc B.

d) Z gồm các số tự nhiện và các số...

**8.** Điền vào chỗ trống (...) để được các khẳng định đúng.

a) $(a;b) = \{x \in R / .....\}$ b) $(a;+\infty) = \{x \in R / .....\}$

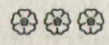
c) $[a;b) = \{x \in R / .....\}$ d) $(-\infty;a) = \{x \in R / .....\}$

**9.** Xác định tính đúng sai của các mệnh đề sau:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $[0;1] \cup (1;3] = [0;3]$ | | |
| b) $(-\infty;5) \cup (0;+\infty) = R$ | | |
| c) $R \setminus (5;+\infty) = (-\infty;5)$ | | |
| d) $R \setminus (-\infty;0] = R_+^*$ | | |

**10.** Cho a, b, c, d $\in R$ ; a < b < c < d. Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $(a;c) \cap (b;d) = (b;c)$ | | |
| b) $(a;c) \cap (b;d) = [b;c]$ | | |
| c) $(a;c] \cap [b;d) = [b;c]$ | | |
| d) $[a;c] \cap [b;d) = [b;c]$ | | |



## ĐÁP ÁN

| Đề \ Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | d | d | b | c | c | d | b | d | b | a |
| 2 | d | a | b | d | c | d | a | b | d | a |
| 3 | a | b | c | d | b | a | c | d | c | d |
| 4 | b | c | a | c | c | d | b | a | c | a |

**ĐỀ 5**

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | Đúng | Đ | D | C | S | Đ | Giao | $a < x < b$ | Đ | Đ |
| b | Sai | Đ | B | A | S | Đ | Hợp | $a < x$ | Đ | S |
| c | Đủ | Đ | A | D | Đ | Đ | Hiệu | $a \le x < b$ | S | Đ |
| d | Cần | S | C | B | Đ | Đ | Nguyên âm | $x < a$ | Đ | Đ |



# CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI

## §1. HÀM SỐ

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Khái niệm hàm số**

***Định nghĩa***

Cho D là một tập con khác rỗng của tập các số thực R.

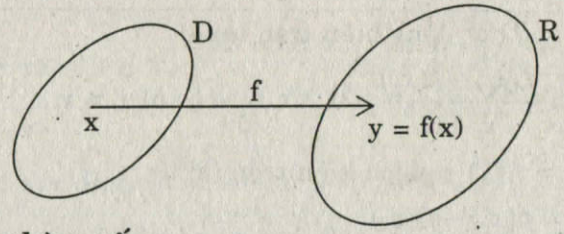
*Hàm số f xác định trên D là một quy tắc cho tương ứng mỗi $x \in D$ với một và chỉ một số y.*

D gọi là *tập xác định* (hay *miền xác định*) của hàm số f, x gọi là *biến số* (hay *đối số*). Biến số x nhận giá trị trên D. Số y tương ứng với mỗi giá trị của biến số x được gọi là *giá trị của hàm số f* tại x (hay tại điểm x), kí hiệu là f(x).

Để biểu thị hàm số f, ta viết: $f : D \to R$

$$x \mapsto y = f(x)$$

Ta cũng thường minh họa hàm số f như hình sau:




**II. Cách cho hàm số**

Một hàm số có thể được cho bằng các cách sau:

1- Cho bằng bảng.

2- Cho bằng biểu đồ.

3- Cho bằng công thức.

❖ Khi cho hàm số bởi công thức $y = f(x)$ mà không chỉ rõ tập xác định của nó, thì ta có quy ước:

Tập xác định của hàm số $y = f(x)$ là tập tất cả các số x sao cho biểu thức $f(x)$ có nghĩa.

**III. Đồ thị của hàm số**

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D.

❖ Đồ thị của hàm số $y = f(x)$ là tập hợp tất cả các điểm $M(x; f(x))$ trên mặt phẳng tọa độ với $x \in D$.

❖ Công thức $y = f(x)$ được gọi là phương trình của đồ thị.

## IV. Sự biến thiên của hàm số

### 1. *Định nghĩa*

❖ Hàm số $y = f(x)$ gọi là *đồng biến (hay tăng)* trên khoảng (a; b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

❖ Hàm số $y = f(x)$ gọi là *nghịch biến (hay giảm)* trên khoảng (a; b) nếu $\forall x_1, x_2 \in (a;b) : x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

❖ *Nói cách khác:*

Hàm số $y = f(x)$ đồng biến trên khoảng (a; b) nếu hai hiệu số $x_1 - x_2$ và $f(x_1) - f(x_2)$ luôn luôn cùng dấu hay tỉ số $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ luôn luôn dương với mọi $x_1, x_2 \in (a;b), x_1 \neq x_2$.

Ngược lại, hàm số $y = f(x)$ nghịch biến trên khoảng (a; b) nếu hai hiệu số $x_1 - x_2$ và $f(x_1) - f(x_2)$ luôn luôn trái dấu, hay tỉ số $\dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2}$ luôn luôn âm với mọi $x_1, x_2 \in (a;b), x_1 \neq x_2$.

Vậy:

$y = f(x)$ đồng biến trên (a; b)

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} > 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 \neq x_2.$

$y = f(x)$ nghịch biến trên (a; b)

$\Leftrightarrow \dfrac{f(x_1) - f(x_2)}{x_1 - x_2} < 0 \quad \forall x_1, x_2 \in (a;b), x_1 \neq x_2.$

### 2. *Bảng biến thiên*

Khảo sát chiếu biến thiên của một hàm số là tìm các khoảng đồng biến và các khoảng nghịch biến của nó.

Kết quả khảo sát được tổng kết trong một bảng gọi là *bảng biến thiên.*

## V. Tính chẵn lẻ của hàm số

### 1. *Định nghĩa*

Cho hàm số $y = f(x)$ với tập xác định D

❖ $y = f(x)$ được gọi là hàm chẵn $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = f(x), \forall x \in D \end{cases}$

❖ $y = f(x)$ được gọi là hàm lẻ $\Leftrightarrow \begin{cases} x \in D \Rightarrow -x \in D \\ f(-x) = -f(x), \forall x \in D \end{cases}$

### 2. *Đồ thị của hàm số chẵn, hàm số lẻ*

❖ Đồ thị của hàm số chẵn nhận trục tung làm trục đối xứng.

❖ Đồ thị của hàm số lẻ nhận gốc tọa độ O làm tâm đối xứng.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 2.1:** Tìm tập xác định của hàm số.

a) $y = \sqrt{x-1} + \sqrt{5-3x}$ b) $y = \dfrac{\sqrt{4x+3}}{\sqrt{2-x}}$

c) $y = \dfrac{2x-1}{x^2-3x+2}$ d) $y = \dfrac{2x+2}{(x+1)(x-3)}$

***Hướng dẫn giải***

a) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} x-1 \geq 0 \\ 5-3x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 1 \\ x \leq \dfrac{5}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 1 \leq x \leq \dfrac{5}{3}$

Vậy tập xác định $D = \left[1; \dfrac{5}{3}\right]$.

b) Hàm số xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 4x+3 \geq 0 \\ 2-x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq -\dfrac{3}{4} \\ x < 2 \end{cases} \Leftrightarrow -\dfrac{3}{4} \leq x < 2$

Vậy tập xác định $D = \left[-\dfrac{3}{4}; 2\right)$.

c) Hàm số xác định $\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq 1 \\ x \neq 2 \end{cases}$

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{1; 2\}$.

d) Hàm số xác định $\Leftrightarrow (x-1)(x-3) \neq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -1 \\ x \neq 3 \end{cases}$

Vậy tập xác định $D = R \setminus \{-1; 3\}$.

**Đề 2.2:** Cho hàm số $y = \begin{cases} \dfrac{1}{x-1} & x \leq 0 \\ \sqrt{x+2} & x > 0 \end{cases}$

a) Tìm tập xác định của hàm số.

b) Tính giá trị của hàm số tại x = –2, x = 0, x = 2.

***Hướng dẫn giải***

a) D = R.

b) $x=-2 \Rightarrow y=-\frac{1}{3}$

$x=0 \Rightarrow y=-1$

$x=2 \Rightarrow y=2$

**Đề 2.3:** Cho hàm số $y=\frac{x-1}{2x^2-3x+1}$. Các điểm sau có thuộc đồ thị của hàm số không?

a) $M_1\left(2;\frac{1}{3}\right)$

b) $M_2(1;0)$

c) $M_3(0;-1)$

d) $M_4\left(\frac{1}{2};-\frac{1}{2}\right)$

***Hướng dẫn giải***

a) $M_1$ thuộc đồ thị ;

b) $M_2$ không thuộc đồ thị ;

c) $M_3$ thuộc đồ thị ;

d) $M_4$ không thuộc đồ thị.

**Đề 2.4:** Dùng định nghĩa tìm các khoảng tăng giảm của hàm số $f(x)=-x^2+4x+2$.

***Hướng dẫn giải***

$f(x)=-(x-2)^2+6$.

$\forall x_1,x_2 \in (2,+\infty): x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1-2<x_2-2$

$\Rightarrow (x_1-2)^2<(x_2-2)^2$

$\Rightarrow -(x_1-2)^2+6>-(x_2-2)^2+6 \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Vậy $f(x)$ giảm trên $(2,+\infty)$.

$\forall x_1,x_2 \in (-\infty,2): x_1<x_2 \Rightarrow x_1-2<x_2-2<0$

$\Rightarrow (x_1-2)^2>(x_2-2)^2$

$\Rightarrow -(x_1-2)^2+6<-(x_2-2)^2+6 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Vậy $f(x)$ tăng trên $(-\infty,2)$.

Tóm lại: $f(x)$ tăng trên $(-\infty,2)$ và giảm trên $(2,+\infty)$.

**Đề 2.5:** Dùng định nghĩa chứng minh:

a) $f(x)=x^2-2x+2$ tăng trên $(1;+\infty)$.

b) $f(x)=\frac{2x-1}{x-3}$ giảm trên $(3;+\infty)$.

***Hướng dẫn giải***

a) $f(x)=(x-1)^2+1$.

$\forall x_1,x_2 \in (1,+\infty): \quad x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1-1<x_2-1$

$\Rightarrow (x_1-1)^2<(x_2-1)^2$

$\Rightarrow (x_1-1)^2+1<(x_2-1)^2+1 \Rightarrow f(x_1)<f(x_2)$

Vậy $f(x)$ tăng trên $(1,+\infty)$.

b) $f(x)=2+\frac{5}{x-3}$

$\forall x_1,x_2 \in (3,+\infty): x_1<x_2 \Rightarrow 0<x_1-3<x_2-3$

$\Rightarrow \frac{1}{x_1-3}>\frac{1}{x_2-3}$

$\Rightarrow 2+\frac{1}{x_1-3}>2+\frac{1}{x_2-3} \Rightarrow f(x_1)>f(x_2)$

Vậy $f(x)$ tăng trên $(3,+\infty)$.

**Đề 2.6:** Xét tính chẵn, lẻ của các hàm số:

a) $y=3x^4-4x^2+3$

b) $y=2x^3-3x+1$

c) $y=|x+1|+|1-x|$

d) $y=|x+1|-|x-1|$

e) $y=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\notin Q\end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

a) $y=f(x)=3x^4-4x^2+3$.

Tập xác định: D = R.

- Rõ ràng, $\forall x\in D \Rightarrow -x\in D$.
- Mặt khác, $\forall x\in D$.

Ta có: $f(-x)=3(-x)^4-4(-x)^2+3=3x^4-4x^2+3=f(x)$.

Vậy $f(x)$ là hàm chẵn.

b) $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$

Ta có: $f(-1) = 2(-1)^3 - 3(-1) + 1 = 2$

$f(1) = 2.1^3 - 3.1 + 1 = 0$

Như vậy: • $f(-1) \neq f(1) \Rightarrow f(x)$ không chẵn

• $f(-1) \neq -f(1) \Rightarrow f(x)$ không lẻ

* Tóm lại: $y = f(x)$ không là hàm chẵn và cũng không là hàm lẻ.

c) $f(x) = |x+1| + |1-x|$ là hàm chẵn.

d) $f(x) = |x+1| - |1-x|$ là hàm lẻ.

e) $f(x) = \begin{cases} 1 & x \in Q \\ 0 & x \notin Q \end{cases}$ là hàm chẵn.

*
* *

# §2. HÀM SỐ BẬC NHẤT

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Khảo sát hàm số bậc nhất y = ax + b a ≠ 0)**

Hàm số bậc nhất được cho bởi công thức $y = ax + b$ với $a \neq 0$.

**1. *Tập xác định D = R.***

**2. *Chiều biến thiên***

*Định lí:* * Nếu a > 0 hàm số $y = ax + b$ đồng biến trên R.

* Nếu a < 0 hàm số $y = ax + b$ nghịch biến trên R.

**3. *Bảng biến thiên***

a > 0

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | $+\infty$ |

a < 0

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\infty$ |

**4. *Đồ thị***

*Đồ thị của hàm số $y = ax + b (a \neq 0)$ là một đường thẳng không song song và cũng không trùng với các trục tọa độ.*

Ta gọi đồ thị của hàm số $y = ax + b$ là đường thẳng $y = ax + b$, a là hệ số góc của nó.

Để vẽ đường thẳng $y = ax + b$ ta cần xác định hai điểm của nó.



Thông thường, ta chọn giao điểm của đường thẳng này với trục hoành và trục tung:

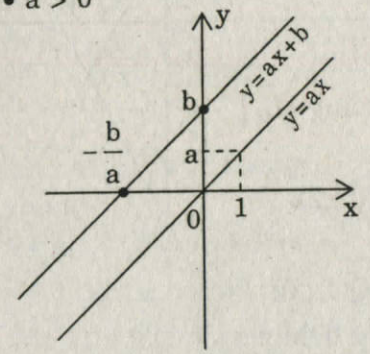
| x | 0 | $-\frac{b}{a}$ |
|---|---|---|
| y | b | 0 |

Vậy đường thẳng $y = ax + b$ đi qua hai điểm A(0; b), B$\left(-\frac{b}{a}; 0\right)$.

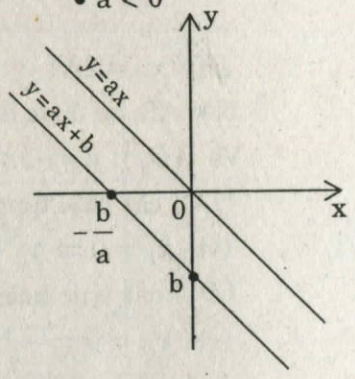
* ***Chú ý:*** Khi b = 0 hai điểm A, B trùng nhau và trùng với gốc tọa độ, vì vậy ta cần xác định thêm một điểm nữa của đường thẳng y = ax. Chẳng hạn điểm (1; a).

Dạng tổng quát của đồ thị hàm số $y = ax + b$.

• a > 0




• a < 0

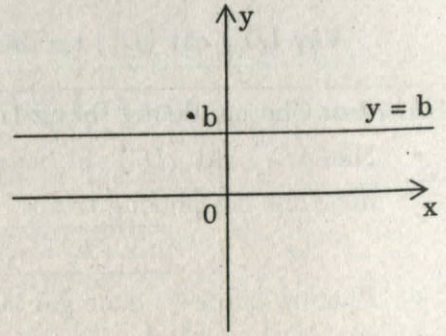



**II. Hàm số hằng y = b**

Khi a = 0 hàm số $y = ax + b$ trở thành y = b. Đó không phải là một hàm bậc nhất ; với mọi giá trị của x hàm số này luôn nhận một giá trị không đổi y = b. Vì vậy y = b được gọi là hàm số hằng.

Đồ thị của hàm số y = b là một đường thẳng song song hoặc trùng với trục hoành và cắt trục tung tại điểm (0 ; b).

* ***Chú ý:*** Đồ thị của hàm số y = b gọi là đường thẳng y = b. Khi b = 0 đường thẳng này trùng với trục hoành.



## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 2.7:** Cho hai đường thẳng: $(D_1): y = 2x - 4$.

$(D_2): y = -2x + 2$.

1) Vẽ $(D_1)$ và $(D_2)$ trên cùng một hệ trục tọa độ Oxy.

2) Tìm tọa độ giao điểm của $(D_1)$ và $(D_2)$.

***Hướng dẫn giải***

1) * Vẽ $(D_1)$: $y = 2x - 4$.

$(D_1)$ cắt trục tung tại A(0 ; -4)

(vì: $x_A = 0 \Rightarrow y_A = -4$).

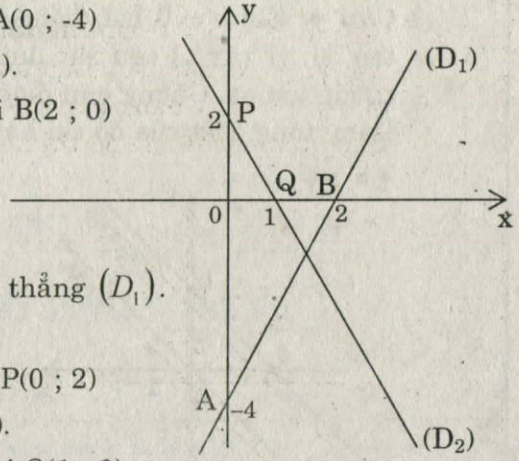
$(D_1)$ cắt trục hoành tại B(2 ; 0)

(vì: $y_B = 0$

$\Rightarrow 2x_B - 4 = 0$

hay $x_B = 2$).

Nối AB, ta được đường thẳng $(D_1)$.




* Vẽ $(D_2)$: $y = -2x + 2$.

$(D_2)$ cắt trục tung tại P(0 ; 2)

(vì: $x_P = 0 \Rightarrow y_P = 2$ ).

$(D_2)$ cắt trục hoành tại Q(1 ; 0)

(vì: $y_Q = 0 \Rightarrow -2x_Q + 2 = 0$ hay $x_Q = 1$).

Nối PQ, ta được đường thẳng $(D_2)$.

2) Phương trình hoành độ giao điểm của $(D_1)$ và $(D_2)$:

$$2x - 4 = -2x + 2 \Leftrightarrow 4x = 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}.$$

Với: $x = \frac{3}{2}$ thế vào phương trình $(D_1)$ ta có: $y = 2.\frac{3}{2} - 4 = -1$.

Vậy $(D_1)$ cắt $(D_2)$ tại điểm $M\left(\frac{3}{2}; -1\right)$.

**** Ghi chú:*** Cho hai đường thẳng $(D_1): y = a_1x + b_1$ và $(D_2): y = a_2x + b_2$.

- Nếu $(D_1)$ cắt $(D_2)$ thì hoành độ giao điểm của $(D_1)$ và $(D_2)$ được cho bởi phương trình:

$$\boxed{a_1x + b_1 = a_2x + b_2} \quad (*)$$

- Phương trình (*) được gọi là phương trình hoành độ giao điểm của $(D_1)$ và $(D_2)$.



- Giải phương trình (*) ta được hoành độ giao điểm. Thế vào phương trình của $(D_1)$ hoặc phương trình của $(D_2)$ ta sẽ được tung độ giao điểm. Từ đó ta tìm được tọa độ giao điểm của $(D_1)$ và $(D_2)$.

**Đề 2.8:** Cho hai đường thẳng $(D_1): y = x + 1$ và $(D_2): y = -x + 3$.

1) Vẽ $(D_1)$ và $(D_2)$ trên cùng một hệ trục tọa độ.

2) $(D_1)$ và $(D_2)$ cắt nhau tại C và cắt trục Ox theo thứ tự tại A và B. Tìm tọa độ của các điểm A, B, C.

***Hướng dẫn giải***

1) * Vẽ $(D_1)$: $y = x + 1$.

$(D_1)$ cắt Ox tại A(-1 ; 0)

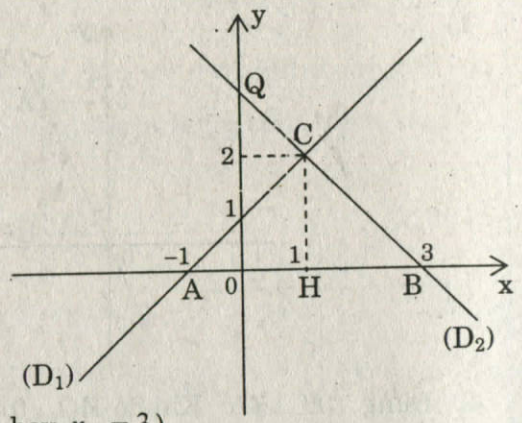
(vì: $y_A = 0 \Rightarrow x_A + 1 = 0$

hay $x_A = -1$)

$(D_1)$ cắt Oy tại P(0 ; 1)

(vì: $x_P = 0 \Rightarrow y_P = 1$).

Nối AP ta được đường thẳng $(D_1)$.




* Vẽ $(D_2)$: $y = -x + 3$

$(D_2)$ cắt Ox tại B(3 ; 0)

(vì: $y_B = 0 \Rightarrow -x_B + 3 = 0$ hay $x_B = 3$).

$(D_2)$ cắt Oy tại Q(0 ; 3) (vì: $x_Q = 0 \Rightarrow y_Q = 3$)

Nối BQ, ta được đường thẳng $(D_2)$.

2) * Theo trên $(D_1)$ và $(D_2)$ cắt Ox lần lượt tại A(-1 ; 0) và B(0 ; 3)

* Phương trình hoành độ giao điểm của $(D_1)$ và $(D_2)$:

$$x + 1 = -x + 3 \Leftrightarrow 2x = 2 \Leftrightarrow x = 1.$$

Thế vào phương trình $(D_1)$: y = 1 + 1 = 2.

Vậy $(D_1)$ và $(D_2)$ cắt nhau tại C(1 ; 2).

**Đề 2.9:** Cho hàm số bậc nhất: $y = (m + 3)x - 2$.

1) Tìm các giá trị của m để hàm số đồng biến.

2) Tìm các giá trị của m để hàm số nghịch biến.

***Hướng dẫn giải***

Hàm số đã cho có dạng: $y = ax + b$

Với $a$ = m + 3 và b = -2.

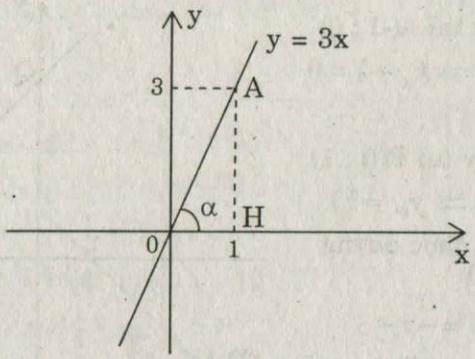
1) Hàm số đồng biến $\Leftrightarrow a>0 \Leftrightarrow m+3>0 \Leftrightarrow m>-3$.
Vậy hàm số đồng biến khi $m>-3$.

2) Hàm số nghịch biến $\Leftrightarrow a<0 \Leftrightarrow m+3<0 \Leftrightarrow m<-3$.
Vậy hàm số nghịch biến khi $m<-3$.

**Đề 2.10:** Cho hàm số: y = 3x.
1) Dựng điểm A(1 ; 3) trên mặt phẳng tọa độ và vẽ đường thẳng y = 3x.
2) Tìm độ dài doạn OA.
3) Dùng máy tính bỏ túi, tính góc $\alpha$ hợp bởi đường thẳng y = 3x với tia Ox.

***Hướng dẫn giải***

1)




2) Dựng $AH \perp Ox$. Khi đó H(1 , 0).
Dựng $AK \perp Oy$. Khi đó K(0 , 3).
Ta có: $OH = |x_H| = 1$
$AH = OK = |y_K| = 3$
Áp dụng định lí Pi-ta-go cho tam giác vuông AHO ta có:
$OA^2 = OH^2 + AH^2 = 1^2 + 3^2 = 10.$
Vậy: $OA = \sqrt{10}$.

3) Tam giác vuông OHA cho ta:
$$tg\alpha = \frac{AH}{OH} = \frac{3}{1} = 3.$$
Vậy: $\alpha = 71^0 33'$.

*
**



# §3. HÀM SỐ $y=|x|; y=|ax+b|; y=[x]$

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Hàm số y = |x|

**1. *Tập xác định D = R.***

**2. *Chiều biến thiên***

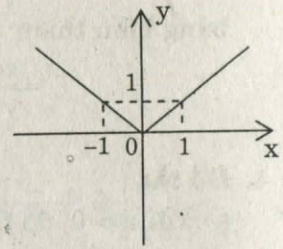
Theo định nghĩa của giá trị tuyệt đối ta có $y=|x|=\begin{cases} x & \text{nếu } x\geq 0 \\ -x & \text{nếu } x<0 \end{cases}$.

Vì vậy hàm số $y=|x|$ đồng biến trên khoảng $(0;+\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-\infty;0)$.

**3. *Bảng biến thiên***

Khi x dần tới $+\infty$ thì $y=|x|=x$ dần tới $+\infty$, khi x dần tới $-\infty$ thì $y=|x|=-x$ cũng dần tới $+\infty$. Ta có bảng biến thiên sau:

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |




**4. *Đồ thị***

Trong khoảng $(0;+\infty)$ đồ thị của hàm số $y=|x|$ trùng với đồ thị của hàm số y = x

Trong khoảng $(-\infty;0)$ đồ thị của hàm số $y=|x|$ trùng với đồ thị của hàm số y = - x.

* ***Chú ý:*** Hàm số $y=|x|$ là một hàm chẵn, đồ thị của nó có trục đối xứng là trục tung .

### II. Hàm số $y=|ax+b|$ $(a\neq 0)$

**1. *Tập xác định D = R.***

**2. *Chiều biến thiên***

❖ Với a > 0

$$y=|ax+b|=\begin{cases} ax+b & \text{nếu } x\in\left(-\frac{b}{a};+\infty\right) \\ -ax-b & \text{nếu } x\in\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right) \end{cases}$$

❖ Với a < 0

$$y=|ax+b|=\begin{cases}-ax-b & \text{nếu } x\in\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)\\ ax+b & \text{nếu } x\in\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)\end{cases}$$

Từ đó suy ra kết luận.

Hàm số $y=|ax+b|$ đồng biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$, nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.

**3. *Bảng biến thiên***

Vì biểu thức $|ax+b|$ luôn luôn nhận giá trị không âm nên khi x dần tới $+\infty$ hoặc $-\infty$ thì $y=|ax+b|$ cũng đều dần tới $+\infty$.

Trong cả hai trường hợp a > 0 và a < 0 hàm số $y=|ax+b|$ có bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

**4. *Đồ thị***

a) Với a > 0, đồ thị hàm số $y=|ax+b|$

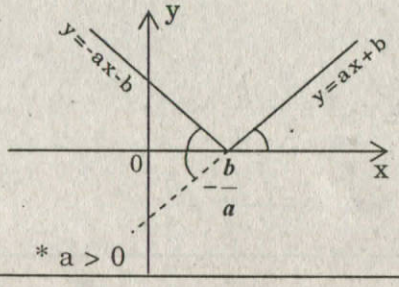
❖ Trùng với đồ thị hàm số $y=ax+b$ trong khoảng $\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.

❖ Trùng với đồ thị hàm số $y=-ax-b$ trong khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$

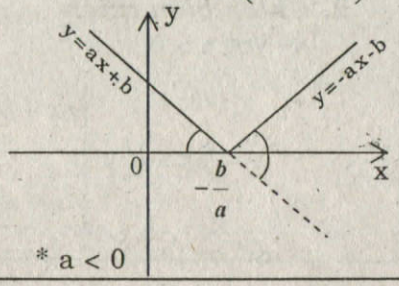
b) Với a < 0, đồ thị hàm số $y=|ax+b|$.

❖ Trùng với đồ thị hàm số $y=-ax-b$ trong khoảng $\left(-\dfrac{b}{a};+\infty\right)$.

❖ Trùng với đồ thị hàm số $y=ax+b$ trong khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{a}\right)$.



* a > 0



* a < 0



## III. Hàm phần nguyên $y=[x]$

**1. *Phần nguyên***

Mỗi số x đều nằm giữa hai số nguyên liên tiếp.

Số nguyên a sao cho $a\le x<a+1$ gọi là phần nguyên của x và kí hiệu là $[x]$.

Theo định nghĩa ta có: $\boxed{[x]\le x<[x]+1}$

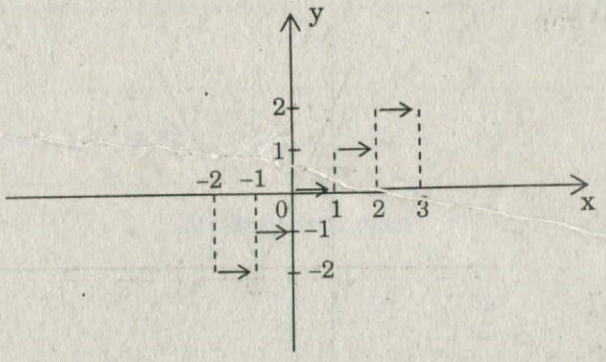
**2. *Đồ thị của hàm số $y=[x]$***

Xét hàm số $y=[x]$.

Với mỗi số nguyên a, ta có $[x]=a$ với mọi $x\in[a;a+1)$.

Như vậy, hàm số $y=[x]$ là hàm số hằng y = a trên mỗi nửa khoảng $[a;a+1)$.

Từ đó suy ra đồ thị của hàm số $y=[x]$ như sau.




## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 2.11:** Lập bảng biến thiên và vẽ đồ thị của các hàm số:

a) $y=|2x|$ b) $y=|2x-4|$.

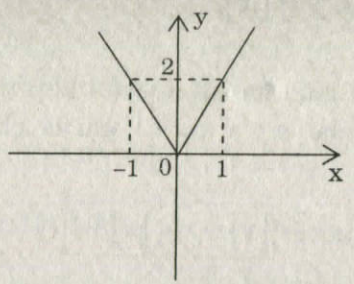
***Hướng dẫn giải***

a) $y=|2x|=\begin{cases}2x & \text{nếu } x\ge 0\\ -2x & \text{nếu } x<0\end{cases}$

❖ Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

❖ Đồ thị:

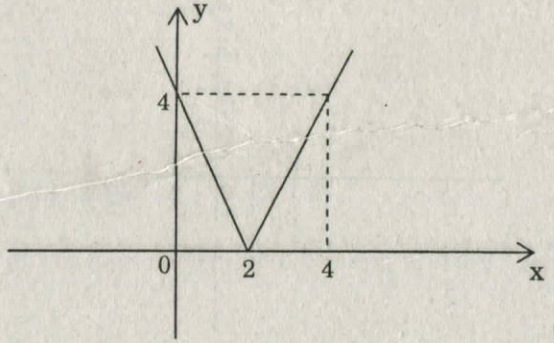



b) $y = |2x-4| = \begin{cases} 2x-4 & \text{nếu } x \geq 2 \\ -2x+4 & \text{nếu } x < 2 \end{cases}$

❖ Bảng biến thiên:

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 0 | ↗ | $+\infty$ |

❖ Đồ thị:




**Đề 2.12:** Khảo sát và vẽ đồ thị hàm số: $y = |x-1| + |2x+4|$.

***Hướng dẫn giải***

❖ Tập xác định: D = R.

❖ Chiều biến thiên:

Ta có: $y = |x-1| + |2x+4| = \begin{cases} -3x-3 & \text{nếu } x \leq -2 \\ x+5 & \text{nếu } -2 < x \leq 1 \\ 3x+3 & \text{nếu } x > 1 \end{cases}$

Hàm số giảm trong khoảng $(-\infty;-2)$

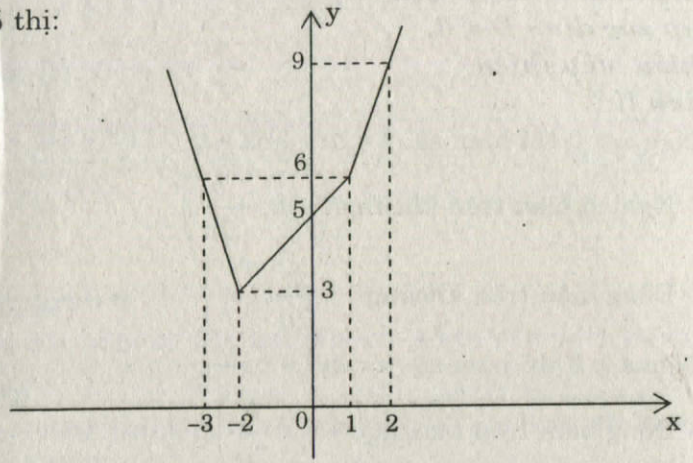
Tăng trong các khoảng (–2 ; 1) ; $(1;+\infty)$.



❖ Bảng biến thiên:

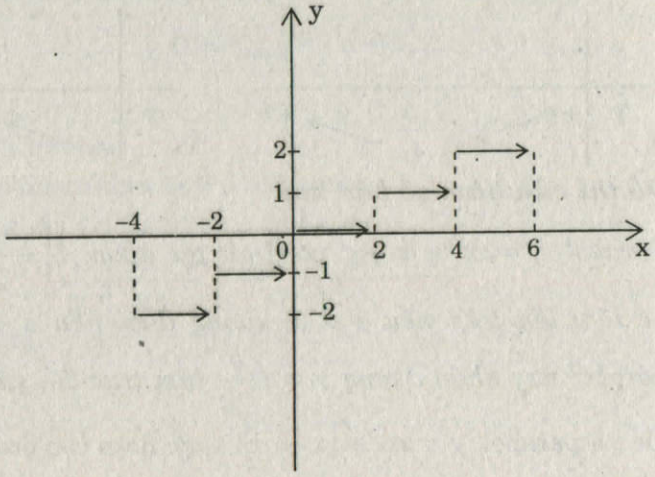
| x | $-\infty$ | | –2 | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 3 | ↗ | 6 | ↘ | $+\infty$ |

❖ Đồ thị:




**Đề 2.13:** Vẽ đồ thị hàm số $y = \left[\frac{x}{2}\right]$.

***Hướng dẫn giải***




* **

# §4. HÀM SỐ BẬC HAI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

*Hàm số bậc hai* là hàm số có dạng $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$

### I. Khảo sát hàm số bậc hai

**1. *Tập xác định D = R.***

**2. *Chiều biến thiên***

***Định lí:***

• Nếu a > 0 thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

- Nghịch biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

- Đồng biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$.

• Nếu a < 0 thì hàm số $y = ax^2 + bx + c$

- Đồng biến trên khoảng $\left(-\infty; -\frac{b}{2a}\right)$.

- Nghịch biến trên khoảng $\left(-\frac{b}{2a}; +\infty\right)$

**3. *Bảng biến thiên***

* a > 0

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | ↗ | $+\infty$ |

* a < 0

| x | $-\infty$ | | $-\frac{b}{2a}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | $-\frac{\Delta}{4a}$ | ↘ | $-\infty$ |

**4. *Đồ thị của hàm số bậc hai***

*Parabol* $y = ax^2 + bx + c$ *có đỉnh tại điểm* $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$, *quay bề lõm lên trên nếu* $a > 0$, *xuống dưới nếu* $a < 0$. *Hơn nữa, parabol này nhận đường* $x = -\frac{b}{2a}$ *làm trục đối xứng.*

Để vẽ parabol $y = ax^2 + bx + c$ ta thực hiện các bước sau:

- Xác định toạ độ của đỉnh $I\left(-\frac{b}{2a}; \frac{-\Delta}{4a}\right)$.

- Vẽ trục đối xứng $x = -\frac{b}{2a}$.

- Xác định tọa độ các giao điểm của parabol với trục tung và trục hoành (nếu có). Xác định thêm một số điểm của đồ thị.

- Vẽ parabol.

* *Ví dụ:* Vẽ parabol $y = 3x^2 - 2x - 1$.

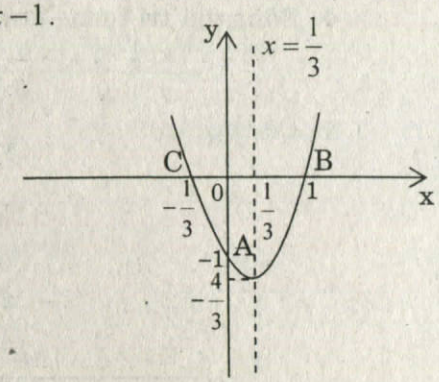
- Đỉnh $I\left(\frac{1}{3}; \frac{-4}{3}\right)$

- Trục đối xứng $x = \frac{1}{3}$

- Giao điểm Oy: A(0 ; –1)

- Giao điểm với Ox: B(1 ; 0),

$C\left(-\frac{1}{3}; 0\right)$.




### II. Đường parabol

- Đồ thị của hàm số bậc hai $y = ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ là một đường parabol.

- Để vẽ đường parabol, ta thực hiện theo các bước vẽ đã trình bày trong phần I.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 2.14:** Vẽ đồ thị các hàm số:

a) $y = x^2$ b) $y = -x^2 + 2x + 3$.

***Hướng dẫn giải***

a) $y = x^2$.

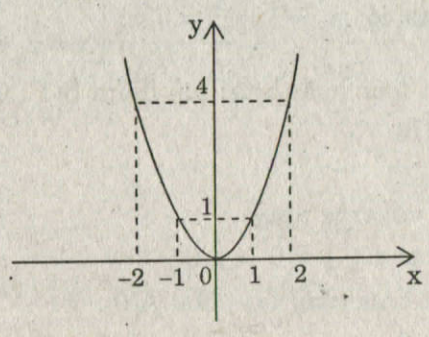
❖ Đỉnh I(0 ; 0).

❖ Trục đối xứng x = 0 (trục tung).

❖ Bảng giá trị tương ứng của x và y:

| x | –2 | –1 | 0 | 1 | 2 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 4 | 1 | 0 | 1 | 4 |

❖ Đồ thị:



b) $y = -x^2 + 2x + 3$.

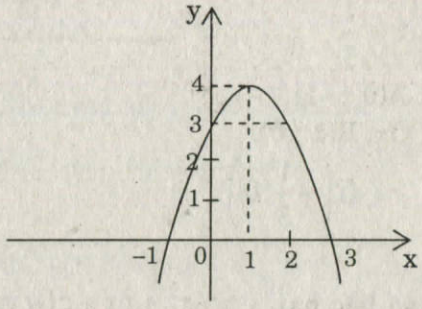
❖ Đỉnh I(1 ; 4).

❖ Trục đối xứng x = 1.

❖ Bảng giá trị tương ứng của x và y:

| x | −1 | 0 | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| y | 0 | 3 | 4 | 3 | 0 |

❖ Đồ thị:




Parabol cắt trục tung tại điểm A(0 ; 3) và trục hoành tại các điểm B(−1 ; 0), C(3 ; 0).

**Đề 2.15:** Xác định tọa độ của đỉnh và giao điểm với trục tung, trục hoành (nếu có) của các parabol:

a) $y = x^2 - 3x + 2$ b) $y = x^2 - 2x$.

***Hướng dẫn giải***

a) $y = x^2 - 3x + 2$ (P)

❖ Đỉnh $I\left(\frac{3}{2}; -\frac{1}{4}\right)$

❖ Giao điểm với trục tung:

Cho x = 0: $y = 0^2 - 3.0 + 2 = 2$

Vậy (P) cắt trục tung tại điểm A(0 ; 2).

❖ Giao điểm với trục hoành:

Cho y = 0 ta có: $x^2 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 1 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy (P) cắt trục hoành tại hai điểm B(1 ; 0), C(2 ; 0).

b) $y = x^2 - 2x$ (P).

❖ Đỉnh I(1 ; −1).

❖ Giao điểm với trục tung:

Cho x = 0, ta có: $y = 0^2 - 2.0 = 0$.

Vậy (P) cắt trục tung tại điểm A(0 ; 0).



❖ Giao điểm với trục hoành:

Cho y = 0, ta có: $x^2 - 2x = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x = 2 \end{array}\right.$

Vậy (P) cắt trục hoành tại hai điểm B(0 ; 0), C(2 ; 0).

**Đề 2.16:** Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 2$ biết rằng parabol đó đi qua hai điểm M(1 ; 5) và N(−2 ; 8).

***Hướng dẫn giải***

(P): $y = ax^2 + bx + 2$.

❖ (P) đi qua M(1 ; 5) nên: $5 = a.1^2 + b.1 + 2$

$\Leftrightarrow a + b = 3$ (1)

❖ (P) đi qua N(−2 ; 8) nên: $8 = a(-2)^2 + b.(-2) + 2 \Leftrightarrow 4a - 2b = 6$

$\Leftrightarrow 2a - b = 3$ (2)

Từ (1) và (2) ta có: a = 2 ; b = 1.

Vậy parabol phải tìm có phương trình: $y = 2x^2 + x + 2$.

**Đề 2.17:** Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua điểm A(8 ; 0) và có đỉnh I(6 ; −12).

***Hướng dẫn giải***

(P): $y = ax^2 + bx + c$.

❖ (P) đi qua A(8 ; 0) nên: 0 = 64a + 8b + c (1)

❖ (P) có đỉnh I(6 ; −12) nên: $\left\{\begin{array}{l} -\frac{b}{2a} = 6 \\ I \in (P) \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 12a + b = 0 & (2) \\ -12 = 36a + 6b + c & (3) \end{array}\right.$

Từ (1), (2), (3) ta tính được: a = 3, b = −36, c = 96.

*
**

# TOÁN TRẮC NGHIỆM

## ĐỀ 6: HÀM SỐ

**1.** Tìm tập xác định của hàm số: $f(x)=\sqrt{x-5}+\dfrac{1}{\sqrt{13-x}}$.

a) $D=[5;13]$ b) D = (5 ; 13)

c) $D=(5;13]$ d) $D=[5;13)$.

**2.** Tìm tập xác định của hàm số: $f(x)=\dfrac{x+5}{x-1}+\dfrac{x-1}{x+5}$.

a) D = R b) $D=R\setminus\{1\}$

c) $D=R\setminus\{-5\}$ d) $D=R\setminus\{-5;1\}$.

**3.** Tìm tập xác định của hàm số: $f(x)=\sqrt{x+1}+\dfrac{1}{|x|-2}$.

a) $D=(-1;+\infty)\setminus\{-2;+2\}$ b) $D=[-1;+\infty)\setminus\{2\}$

c) $D=[-1;+\infty)\setminus\{-2\}$ d) Một đáp số khác.

**4.** Cho hàm số $y=f(x)=x^2+4x$. Tìm x để $f(x)=5$.

a) x = 1 b) x = −5

c) x = 1 ; x = −5 d) Một đáp số khác.

**5.** Cho hàm số $y=f(x)=-x^2+4x+2$.

a) Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;0)$.

b) Hàm số giảm trên khoảng $(5;+\infty)$.

c) Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;2)$.

d) Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;2)$.

**6.** Cho hàm số $y=x^2-4x+12$. Trong các mệnh đề sau, tìm mệnh đề đúng:

a) Hàm số luôn luôn tăng.

b) Hàm số luôn luôn giảm.

c) Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;2)$ và tăng trên khoảng $(2;+\infty)$.

d) Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;2)$ và giảm trên khoảng $(2;+\infty)$.



**7.** Bảng biến thiên nào dưới đây là của hàm số: $y=-x^2+2x+1$.

a)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | 2 | ↘ | $-\infty$ |

b)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | 2 | ↗ | $+\infty$ |

c)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

d)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | | ↘ | $-\infty$ |

**8.** Cho hàm số: $y=\dfrac{2}{1-x}$. Hãy tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a) Hàm số giảm trên hai khoảng $(-\infty;1)$ ; $(1;+\infty)$.

b) Hàm số tăng trên hai khoảng $(-\infty;1)$ ; $(1;+\infty)$.

c) Hàm số tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ và giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

d) Hàm số giảm trên khoảng $(-\infty;1)$ và tăng trên khoảng $(1;+\infty)$.

**9.** Cho hai hàm số: $f(x)=|x+2|-|x-2|$ và $g(x)=-x^4-x^2+1$.

Khi đó:

a) $f(x)$ và $g(x)$ cùng chẵn.

b) $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ.

c) $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

d) $f(x)$ lẻ, $g(x)$ chẵn.

**10.** Cho hai hàm số: $f(x)=x^3-3x$ và $g(x)=-x^3+x^2$.

Khi đó:

a) $f(x)$ và $g(x)$ cùng lẻ.

b) $f(x)$ lẻ ; $g(x)$ chẵn.

c) $f(x)$ chẵn, $g(x)$ lẻ.

d) $f(x)$ lẻ, $g(x)$ không chẵn không lẻ.

## ĐỀ 7: HÀM SỐ

**1.** Tìm tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{x-3}$.

a) $D = R \setminus \{3\}$ b) $D = [3;+\infty)$

c) $D = (3;+\infty)$ d) $D = (-\infty;3)$.

**2.** Tìm tập xác định của hàm số: $y = \sqrt{x-3} + \dfrac{1}{\sqrt{1-x}}$.

a) $D = (1;3]$ b) $D = (-\infty;1) \cup [3;+\infty)$

c) $D = (-\infty;1) \cup (3;+\infty)$ d) $D = \varnothing$.

**3.** Tìm tập xác định của hàm số: $y = \dfrac{3x+4}{(x-2)\sqrt{x+4}}$.

a) $D = R \setminus \{2\}$ b) $D = (-4;+\infty) \setminus \{2\}$

c) $D = [-4;+\infty) \setminus \{2\}$ d) $D = (-\infty;-4)$.

**4.** Cho hàm số: $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{x+1} & \text{nếu } x \geq 0 \\ \dfrac{1}{x-1} & \text{nếu } x < 0 \end{cases}$. Tính $f(0); f(2); f(-2)$.

a) $f(0) = 0; f(2) = \dfrac{2}{3}; f(-2) = 2$.

b) $f(0) = 0; f(2) = \dfrac{2}{3}; f(-2) = -\dfrac{1}{3}$.

c) $f(0) = 0; f(2) = 1; f(-2) = -\dfrac{1}{3}$.

d) $f(0) = 0; f(2) = 1; f(-2) = 2$.

**5.** Cho hàm số $f(x) = \dfrac{4}{x+1}$. Khi đó:

a) $f(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty;-1)$ và giảm trên khoảng $(-1;+\infty)$.

b) $f(x)$ tăng trên hai khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

c) $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$ và tăng trên khoảng $(-1;+\infty)$.

d) $f(x)$ giảm trên khoảng $(-\infty;-1)$ và $(-1;+\infty)$.

**6.** Cho hàm số $f(x) = x^2 - 6x + 1$. Khi đó:

a) $f(x)$ tăng trên khoảng $(-\infty;3)$ và giảm trên khoảng $(3;+\infty)$.



b) $f(x)$ giảm trên hai khoảng $(-\infty;3)$ và tăng trên khoảng $(3;+\infty)$.

c) $f(x)$ luôn tăng.

d) $f(x)$ luôn giảm.

**7.** Trong các hàm số sau hàm số nào không phải là hàm chẵn.

a) $y = |x-5| + |x+5|$ b) $y = x^4 - x^2 + 12$

c) $y = |1-x| + |1+x|$ d) $y = |x^2 - 1| + x$.

**8.** Cho hàm số $y = f(x) = |x+5|$. Tìm x để $f(x) = 2$

a) x = −3 b) x = −7

c) x = −3 ; x = −7 d) Một đáp số khác.

**9.** Cho hai hàm số: $f(x) = |x+2| + |x-2|$ và $g(x) = x^3 + 5x$.

Khi đó:

a) $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm lẻ.

b) $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm chẵn.

c) $f(x)$ lẻ ; $g(x)$ chẵn.

d) $f(x)$ chẵn ; $g(x)$ lẻ.

**10.** Cho hai hàm số: $f(x) = \dfrac{1}{x}$ và $g(x) = -x^4 + x^2 - 1$.

Khi đó:

a) $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm lẻ.

b) $f(x)$ và $g(x)$ đều là hàm chẵn.

c) $f(x)$ lẻ ; $g(x)$ chẵn.

d) $f(x)$ chẵn ; $g(x)$ lẻ.

## ĐỀ 8: HÀM SỐ BẬC NHẤT - HÀM SỐ $y = |x|; y = |ax+b|; y = [x]$

**1.** Xác định a, b để đồ thị hàm số $y = ax + b$ đi qua các điểm A(0 ; −1), $B\left(\dfrac{1}{5};0\right)$.

a) a = 0 ; b = −1 b) a = 5 ; b = −1

c) a = 1 ; b = −5 d) Một đáp số khác.

**2.** Phương trình đường thẳng có hệ số góc a = 3 và đi qua điểm A(1 ; 4) là:

a) y = 3x + 4 b) y = 3x + 3

c) y = 3x + 1 d) y = 3x − 1.

**3.** Cho hàm số $y = |2x - 4|$. Bảng biến thiên nào sau đây là bảng biến thiên của hàm số đã cho:

a)

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b)

| x | $-\infty$ | | 0 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

c)

| x | $-\infty$ | | $-4$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

d)

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | $\nearrow$ | 0 | $\searrow$ | $-\infty$ |

**4.** Phương trình đường thẳng đi qua điểm A(1 ; –1) và song song với trục Ox là:

a) y = 1 b) y = –1

c) x = 1 d) x = –1.

**5.** Phương trình đường thẳng đi qua hai điểm A(5 ; 2) và B(–3 ; 2) là:

a) y = 5 b) y = –3

c) y = 5x + 2 d) y = 2.

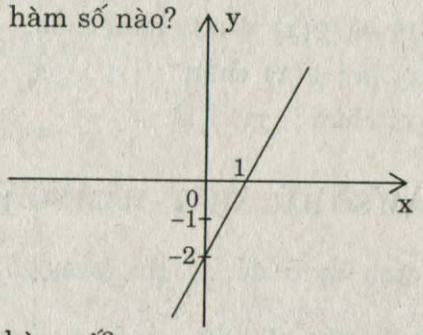
**6.** Đồ thị sau đây biểu diễn hàm số nào?

a) y = 2x – 2

b) y = x – 2

c) y = –2x – 2

d) y = –x – 2.



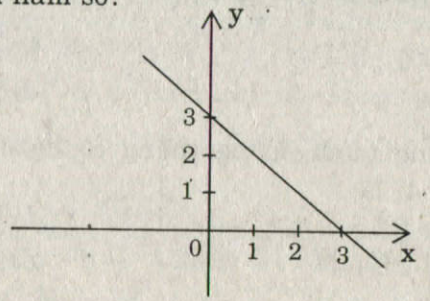

**7.** Đồ thị sau đây biểu diễn hàm số?

a) y = –x + 3

b) y = –x – 3

c) y = x – 3

d) y = x + 3.





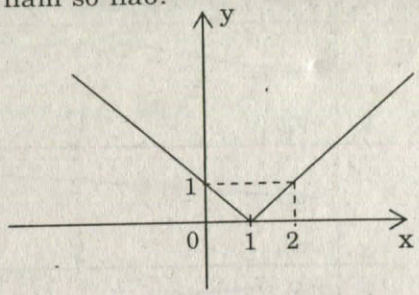

**8.** Đồ thị sau đây biểu diễn hàm số nào?

a) $y = |x + 1|$

b) $y = |x - 1|$

c) $y = |x| + 1$

d) $y = |x| - 1$.




**9.** Hàm số $y = x + |x|$ được viết lại là:

a) $y = \begin{cases} x & \text{nếu } x \le 0 \\ 2x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 0 & \text{nếu } x \le 0 \\ 2x & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 2x & \text{nếu } x \le 0 \\ 0 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -2x & \text{nếu } x \le 0 \\ 0 & \text{nếu } x > 0 \end{cases}$

**10.** Hàm số $y = |x + 1| + |x - 3|$ được viết lại là:

a) $y = \begin{cases} -2x + 2 & \text{nếu } x \le -1 \\ 4 & \text{nếu } -1 < x \le 3 \\ 2x - 2 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$

b) $y = \begin{cases} 2x - 2 & \text{nếu } x \le -1 \\ 4 & \text{nếu } -1 < x \le 3 \\ -2x + 2 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$

c) $y = \begin{cases} 2x + 2 & \text{nếu } x \le -1 \\ 4 & \text{nếu } -1 < x \le 3 \\ -2x - 2 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$

d) $y = \begin{cases} -2x - 2 & \text{nếu } x \le -1 \\ 4 & \text{nếu } -1 < x \le 3 \\ 2x + 2 & \text{nếu } x > 3 \end{cases}$.

## ĐỀ 9: HÀM SỐ BẬC HAI

**1.** Bảng biến thiên nào sau đây là của hàm số: $y = x^2 - 2x + 5$

a)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | $\searrow$ | 4 | $\nearrow$ | $+\infty$ |

b)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | 4 | ↘ | $-\infty$ |

c)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $-\infty$ | ↗ | | ↗ | $+\infty$ |

d)

| x | $-\infty$ | | 1 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| y | $+\infty$ | ↘ | | ↘ | $-\infty$ |

**2.** Cho parabol (P): $y = -3x^2 + 6x - 1$. Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) (P) có đỉnh I(1 ; 2).

b) (P) có trục đối xứng x = 1.

c) (P) cắt trục tung tại điểm A(0 ; –1).

d) Cả a, b, c đều đúng.

**3.** Cho parabol (P): $y = x^2 - 2x - 3$. Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) (P) có đỉnh I(1 ; –3).

b) Hàm số $y = x^2 - 2x - 3$ tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ và giảm trên khoảng $(1;+\infty)$.

c) (P) cắt Ox tại các điểm A(-1 ; 0), B(3 ; 0).

d) Cả a, b, c đều đúng.

**4.** Tìm a để parabol (P): $y = ax^2 + 2x + 5$ đi qua điểm A(2 ; 1).

a) a = –5 b) a = –2

c) a = 2 d) Một đáp số khác.

**5.** Xác định parabol $y = ax^2 + bx + 1$ biết rằng parabol đó đi qua hai điểm A(1 ; 4) và B(–1 ; 2).

a) $y = x^2 + 2x + 1$ b) $y = 5x^2 - 2x + 1$

c) $y = -x^2 + 5x + 1$ d) $y = 2x^2 + x + 1$.

**6.** Parabol $y = 3x^2 - 2x + 1$.

a) Có đỉnh $I\left(-\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ b) Có đỉnh $I\left(\frac{1}{3};-\frac{2}{3}\right)$.

c) Có đỉnh $I\left(\frac{1}{3};\frac{2}{3}\right)$ d) Đi qua điểm M(–2 ; 9).



**7.** Đường thẳng nào trong các đường thẳng sau là trục đối xứng của parabol $y = -2x^2 + 5x + 3$?

a) $x = \frac{5}{2}$ b) $x = -\frac{5}{2}$

c) $x = \frac{5}{4}$ d) $x = -\frac{5}{4}$.

**8.** Hàm số $y = 2x^2 + 4x - 1$.

a) Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và nghịch biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

b) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-2)$ và đồng biến trên khoảng $(-2;+\infty)$.

c) Đồng biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

d) Nghịch biến trên khoảng $(-\infty;-1)$ và đồng biến trên khoảng $(-1;+\infty)$.

**9.** Parabol (P): $y = -x^2 + 6x + 1$.

a) Có trục đối xứng x = 6 và đi qua điểm A(0 ; 1).

b) Có trục đối xứng x = –6 và đi qua điểm A(1 ; 6).

c) Có trục đối xứng x = 3 và đi qua điểm A(2 ; 9).

d Có trục đối xứng x = 3 và đi qua điểm A(3 ; 9).

**10.** Xác định a, b, c biết parabol $y = ax^2 + bx + c$ đi qua gốc tọa độ và có đỉnh I(–1 ; –3).

a) a = – 3 ; b = 6 ; c = 0 b) a = 3 ; b = 6 ; c = 0.

c) a = 3 ; b = –6 ; c = 0 d) Một đáp số khác.

## ĐỀ 10: ÔN TẬP CHƯƠNG II

**1.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Tập xác định của hàm số $y = \frac{2}{x-1}$ là ...

b) Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x-1}$ là ...

c) Tập xác định của hàm số $y = x + 2 + \frac{1}{\sqrt{2-x}}$ là ...

d) Tập xác định của hàm số $y = \sqrt{x+3} - \sqrt{1-x}$ là ...

**2.** Đánh dấu "x" vào ô đúng , sai tương ứng với các mệnh đề:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Hàm số y = 2x + 5 tăng trên R | | |
| b) Hàm số y = -2x + 1 giảm trên khoảng $(-\infty;0)$ | | |
| c) Hàm số $y=2x^2-4x+1$ tăng trên khoảng $(-\infty;1)$ | | |
| d) Hàm số $y=x^2+6x$ tăng trên khoảng $(-3;+\infty)$ | | |

**3.** Điền số thích hợp vào ô vuông:

a) Đường thẳng $y=x+\square$ đi qua điểm A(2 ; 5).

b) Đường thẳng $y=-2x+\square$ đi qua điểm A(1 ; -5).

c) Parabol $y=x^2+x+\square$ đi qua điểm A(-1 ; 0).

d) Parabol $y=5x^2-\sqrt{2}x+\square$ đi qua gốc tọa độ O.

**4.** Lấy cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Parabol $y=-x^2+4x+1$ có trục đối xứng ... | A) x = -2 |
| b) Parabol $y=-x^2-4x+1$ có trục đối xứng ... | B) x = -1 |
| c) Parabol $y=x^2+2x+2$ có trục đối xứng ... | C) x = 2 |
| d) Parabol $y=x^2-2x$ có trục đối xứng ... | D) x = 1 |

**5.** Lấy cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Parabol $y=x^2-2x+1$ có đỉnh ... | A) I(-1 ; -2) |
| b) Parabol $y=-3x^2+6x$ có đỉnh ... | B) I(1 ; 3) |
| c) Parabol $y=3x^2+6x+3$ có đỉnh ... | C) I(1 ; 0) |
| d) Parabol $y=x^2+4x$ có đỉnh ... | D) I(-1 ; 0) |

**6.** Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Hàm số $y=\dfrac{x-1}{x^2+1}$ có tập xác định là $D=R\setminus\{1\}$ | | |
| b) Hàm số $y=\sqrt{x-1}+\dfrac{x+1}{x-1}$ có tập xác định là $D=(1;+\infty)$ | | |
| c) Hàm số $y=\lvert x-15\rvert+\lvert x+15\rvert$ là hàm chẵn. | | |
| d) Hàm số $y=3x^3+x^2$ là hàm lẻ. | | |



**7.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Nếu a > 0 thì hàm số $y=ax^2+bx+c$ ... biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.

b) Nếu a > 0 thì hàm số $y=ax^2+bx+c$ ... biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

c) Nếu a < 0 thì hàm số $y=ax^2+bx+c$ ... biến trên khoảng $\left(-\infty;-\dfrac{b}{2a}\right)$.

d) Nếu a < 0 thì hàm số $y=ax^2+bx+c$ ... biến trên khoảng $\left(-\dfrac{b}{2a};+\infty\right)$.

**8.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột một để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Đường thẳng đi qua hai điểm A(0 ; 0), B(1 ; 1) là ... | A) y = 2x − 1 |
| b) Đường thẳng đi qua hai điểm A(1 ; 0), B(2 ; −1) là ... | B) y = 2x |
| c) Đường thẳng đi qua hai điểm A(1 ; 1), B(0 ; −1) là ... | C) y = x |
| d) Đường thẳng đi qua hai điểm A(0 ; 0), B(4 ; 8) là ... | D) y = −x + 1 |

**9.** Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng với các mệnh đề.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Parabol $y=-x^2+x+1$ có đỉnh $I\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{5}{4}\right)$. | | |
| b) Parabol $y=x^2-6x+1$ có trục đối xứng x = 6. | | |
| c) $y=\sqrt{x^2+1}$ là hàm số chẵn. | | |
| d) $y=\sqrt{x}$ là hàm số lẻ. | | |

**10.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Đường thẳng đi qua A(1 ; −2) và song song với Ox có phương trình là ...

b) Đường thẳng đi qua A(5 ; −1) và B(3 ; −1) có phương trình là ...

c) Hàm số $y=\lvert ax+b\rvert$ $(a\neq 0)$ đồng biến trên khoảng ...

d) Hàm số $y=\lvert ax+b\rvert$ $(a\neq 0)$ nghịch biến trên khoảng ...

# ĐÁP ÁN

| Đề \ Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 6 | d | d | b | c | d | c | a | b | d | d |
| 7 | c | d | b | b | d | b | d | c | d | c |
| 8 | b | c | a | b | d | a | a | b | b | a |
| 9 | a | d | c | b | d | c | c | d | c | b |

**ĐỀ 10**

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $R\setminus\{1\}$ | Đ | 3 | C | C | S | nghịch | C | Đ | $y=-2$ |
| b | $[1;+\infty)$ | Đ | -3 | A | B | Đ | đồng | D | S | $y=-1$ |
| c | $(-\infty;2)$ | S | 0 | B | D | Đ | đồng | A | Đ | $\left(-\frac{b}{a};+\infty\right)$ |
| d | $[-3;1]$ | Đ | 0 | D | A | S | nghịch | B | S | $\left(-\infty;-\frac{b}{a}\right)$ |



*CHƯƠNG III*

# PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH

## §1. KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Định nghĩa phương trình**

**1. *Phương trình một ẩn***

Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai biểu thức của x.

Ta gọi mệnh đề chứa biến dạng $f(x) = g(x)$ (1)

là *phương trình một ẩn*, x là *ẩn số*, $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của phương trình.

Khi cho phương trình (1), điều ta quan tâm đầu tiên là điều kiện của ẩn số x để hai vế của phương trình có nghĩa (tức là mọi phép toán trong đó đều thực hiện được).

Ta gọi đó là *điều kiện* của phương trình.

Nếu tồn tại số $x_0$ thỏa mãn điều kiện của phương trình sao cho $f(x_0) = g(x_0)$ thì $x_0$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình (1).

Giải một phương trình là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của nó (gọi tắt là tập nghiệm). Nếu tập nghiệm của một phương trình là tập rỗng, ta nói phương trình đó *vô nghiệm*.

**2. *Phương trình nhiều ẩn***

Cho các mệnh đề chứa biến $3x+7y=-2$ (2)

$$2x^2+5xy-4z=0 \quad (3)$$

trong đó x, y, z là các biến. Tùy thuộc các giá trị của x, y, z ta được những mệnh đề đúng hoặc sai. Các mệnh đề chứa biến này được gọi là những *phương trình nhiều ẩn*: phương trình (2) có hai ẩn x, y, phương trình (3) có ba ẩn x, y, z.

Cặp số $(x_0;y_0)$ thỏa mãn phương trình (2) (hoặc bộ ba số $(x_0;y_0;z_0)$ thỏa mãn phương trình (3) ) được gọi là *một nghiệm* của phương trình đó. Chẳng hạn (-3 ; 1) là một nghiệm của phương trình (2), còn (3 ; -2 ; -3) là một nghiệm của phương trình (3).

## II. Phương trình tương đương - Phép biến đổi tương đương

### 1. *Phương trình tương đương và phương trình hệ quả*

Cho hai phương trình $f_1(x) = g_1(x)$ (4)

và $f_2(x) = g_2(x)$ (5)

Nếu các tập nghiệm của hai phương trình đó bằng nhau thì ta nói phương trình (4) *tương đương* với phương trình (5) và kí hiệu (4) $\Leftrightarrow$ (5).

Nếu tập nghiệm của phương trình (5) *chứa* tập nghiệm của phương trình (4) thì ta nói phương trình (5) là *hệ quả* của phương trình (4) và kí hiệu (4) $\Rightarrow$ (5).

### 2. *Phép biến đổi tương đương*

Để giải một phương trình, thông thường ta cần biến đổi phương trình đó thành một phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là các *phép biến đổi tương đương*.

* ***Định lí:*** *Nếu thực hiện các phép biến đổi sau đây trên một phương trình mà điều kiện của phương trình không bị thay đổi thì ta được một phương trình mới tương đương:*

*a) Biến đổi đồng nhất ở từng vế.*

*b) Cộng hay trừ vào hai vế của một phương trình cùng một số hoặc cùng một biểu thức.*

*c) Nhân hoặc chia hai vế của một phương trình với cùng một số khác 0 hoặc với cùng một biểu thức luôn có giá trị khác 0.*

## III. Phương trình chứa tham số

Trong một phương trình, các biểu thức ở hai vế có thể chứa những chữ khác ngoài các ẩn. Các chữ này được xem như những hằng số và được gọi là *tham số*. Lúc đó phương trình được gọi là phương trình chứa tham số.

Chẳng hạn, phương trình $|2x-1| = x+m$ và phương trình $2mx + y = 5$ chứa tham số m.

Nói chung tập nghiệm của một phương trình chứa tham số phụ thuộc vào giá trị của tham số. Việc tìm tập nghiệm của một phương trình chứa tham số được gọi là *giải và biện luận* phương trình đó.

* ***Ghi chú:*** Có nhiều phương trình mà khi giải ta không viết được chính xác nghiệm của chúng dưới dạng số thập phân, chẳng hạn phương trình $\sqrt{3}x = 2$.

Để tính gần đúng các nghiệm này ta có thể sử dụng máy tính bỏ túi.



## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 3.1:** Giải các phương trình sau:

a) $\sqrt{x} = \sqrt{-x}$

b) $\sqrt{x-3} = \sqrt{3-x} + 1$

c) $x + \sqrt{x-2} = 2 + \sqrt{x-2}$

d) $x + \sqrt{x-2} = 1 + \sqrt{x-2}$

e) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{3}{\sqrt{x-1}}$

f) $\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-1}}$.

***Hướng dẫn giải***

a) Điều kiện: $\begin{cases} x \ge 0 \\ -x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 0$

• x = 0 thỏa phương trình. Vậy phương trình có 1 nghiệm x = 0.

b) Điều kiện: $\begin{cases} x-3 \ge 0 \\ 3-x \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = 3$

• x = 3 không thỏa phương trình. Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện: $x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Phương trình tương đương x = 2 (nhận)

Phương trình có 1 nghiệm x = 2.

d) Điều kiện: $x - 2 \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 2$.

Phương trình tương đương x = 1 (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

e) Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \sqrt{x-1} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Phương trình tương đương x = 3 (nhận)

Phương trình có một nghiệm x = 3.

f) Điều kiện: $\begin{cases} x-1 \ge 0 \\ \sqrt{x-1} \ne 0 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$

Phương trình tương đương x = 1 (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

**Đề 3.2:** Giải các phương trình sau:

a) $x + \dfrac{1}{x-1} = \dfrac{2x-1}{x-1}$

b) $x + \dfrac{1}{x-2} = \dfrac{2x-3}{x-2}$.

c) $\sqrt{x-3}\left(x^2 - 3x + 2\right) = 0$

d) $\sqrt{x+1}\left(x^2 - x - 2\right) = 0$.

e) $\dfrac{x}{\sqrt{x-2}} = \dfrac{1}{\sqrt{x-2}} - \sqrt{x-2}$

f) $\dfrac{x^2-4}{\sqrt{x+1}} = \dfrac{x+3}{\sqrt{x+1}} + \sqrt{x+1}$

***Hướng dẫn giải***

a) Điều kiện: $x \neq 1$

Phương trình tương đương:

$$x(x-1)+1=2x-1 \Leftrightarrow x^2-3x+2=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=1 & (\text{loại}) \\ x=2 & (\text{nhận}) \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 2.

b) Điều kiện: $x \neq 2$

Phương trình tương đương:

$$x(x-2)+1=2x-3 \Leftrightarrow x^2-4x+4=0 \Leftrightarrow x=2 \text{ (loại)}$$

Vậy phương trình vô nghiệm.

c) Điều kiện: $x \geq 3$

Phương trình tương đương $\begin{bmatrix} \sqrt{x-3}=0 \\ x^2-3x+2=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=3 & (\text{nhận}) \\ x=1 & (\text{loại}) \\ x=2 & (\text{loại}) \end{bmatrix}$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 3.

d) Điều kiện: $x \geq -1$

Phương trình tương đương $\begin{bmatrix} \sqrt{x+1}=0 \\ x^2-x-2=0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-1 & (\text{nhận}) \\ x=2 & (\text{nhận}) \end{bmatrix}$

Vậy phương trình có hai nghiệm x = - 1 , x = 2.

e) Điều kiện: x > 2

Phương trình tương đương $x=1-(x-2) \Leftrightarrow x=\dfrac{3}{2}$ (loại)

Vậy phương trình vô nghiệm.

f) Điều kiện: x > −1

Phương trình tương đương:

$$x^2-4=x+3+(x+1) \Leftrightarrow x^2-2x-8=0 \Leftrightarrow \begin{bmatrix} x=-2 & (\text{loại}) \\ x=4 & (\text{nhận}) \end{bmatrix}$$

Vậy phương trình có một nghiệm x = 4.

**Đề 3.3:** Giải các phương trình sau:

a) $|x-2|=x+1$ b) $|x+1|=x-2$

c) $2|x-1|=x+2$ d) $|x-2|=2x-1$.

***Hướng dẫn giải***

a) * $x-2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 2$

Phương trình tương đương $x-2=x+1 \Leftrightarrow -2=1$ (vô nghiệm)

* $x-2<0 \Leftrightarrow x<2$

Phương trình tương đương $-(x-2)=x+1 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

So với điều kiện x < 2 phương trình có một nghiệm $x=\dfrac{1}{2}$.

b) Vô nghiệm.

c) Đáp số: x = 0 ; x = 4.

d) Đáp số: x = 1.

**Đề 3.4:** Giải các phương trình sau:

a) $\dfrac{|x|}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}}$ b) $\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}}$.

c) $\dfrac{|x|}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}}$ d) $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{x-2}}$

***Hướng dẫn giải***

a) Điều kiện: x > 1

Ta có: $\dfrac{|x|}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow |x|=x \Leftrightarrow x=x$ (luôn thỏa với $\forall x>1$)

Vậy tập nghiệm: $S=(1;+\infty)$.

b) Điều kiện: x > 1

Ta có: $\dfrac{|x-2|}{\sqrt{x-1}}=\dfrac{x-2}{\sqrt{x-1}} \Leftrightarrow |x-2|=x-2 \Leftrightarrow x \geq 2$

Vậy tập nghiệm $S=[2;+\infty)$.

c) Điều kiện: x < 2

Ta có: $\dfrac{|x|}{\sqrt{2-x}}=\dfrac{x}{\sqrt{2-x}} \Leftrightarrow |x|=x \Leftrightarrow x \geq 0$

Kết hợp điều kiện ta có: $0 \leq x < 2$

Vậy tập nghiệm $S=[0;2)$.

d) Điều kiện: x > 2

Ta có: $\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x-2}}=\dfrac{1-x}{\sqrt{x-2}} \Leftrightarrow |x-1|=1-x \Leftrightarrow 1-x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 1$ (loại)

Vậy tập nghiệm $S=\varnothing$.

# §2. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN VÀ HAI ẨN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Giải và biện luận phương trình dạng $ax + b = 0$

Bảng tóm tắt:

| $ax+b=0$ | |
|---|---|
| $a \neq 0$ | có nghiệm $x = -\dfrac{b}{a}$. |
| $a = 0$ | $b \neq 0$: vô nghiệm.<br>b = 0: tập nghiệm là R. |

Khi $a \neq 0$, phương trình $ax+b=0$ được gọi là *phương trình bậc nhất một ẩn.*

### II. Các phương trình quy về dạng $ax + b = 0$

Có nhiều phương trình mà việc giải chúng dẫn đến tìm nghiệm của các phương trình dạng $ax+b=0$. Sau đây là một số ví dụ.

***Ví dụ 1:*** Giải và biện luận phương trình $\dfrac{2mx-1}{x+1} = 3$ (1)

***Giải***

Điều kiện của phương trình (1) là $x \neq -1$. Biến đổi phương trình (1) thành phương trình hệ quả $2mx - 1 = 3(x+1)$

hay $(2m-3)x = 4$ (2)

Giải và biện luận phương trình (2):

$m \neq \dfrac{3}{2}$: (2) có nghiệm $x = \dfrac{4}{2m-3}$.

$m = \dfrac{3}{2}$ : (2) vô nghiệm.

Để loại nghiệm ngoại lai của phương trình (2) ta phải kiểm tra điều kiện $x \neq -1$:

$$\frac{4}{2m-3} \neq -1 \Leftrightarrow 4 \neq -2m+3 \Leftrightarrow m \neq -\frac{1}{2}.$$

Kết luận:

$m = \dfrac{2}{3}$ hoặc $m = -\dfrac{1}{2}$ : Phương trình (1) vô nghiệm.

$m \neq \dfrac{2}{3}$ và $m \neq -\dfrac{1}{2}$ : Phương trình (1) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{4}{2m-3}.$$

***Ví dụ 2:*** Giải và biện luận phương trình $|2x-m| = |mx+5|$ (3)

***Giải***

Áp dụng tính chất $|A| = |B| \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} A = B \\ A = -B \end{array}\right.$

ta được (3) $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} 2x-m = mx+5 & (4) \\ 2x-m = -mx-5 & (5) \end{array}\right.$

❖ Giải phương trình (4):

$(4) \Leftrightarrow (m-2)x = -m-5$.

m = 2: (4) vô nghiệm.

$m \neq 2$: (4) có nghiệm $x_1 = \dfrac{-m-5}{m-2} = \dfrac{m+5}{2-m}$.

❖ Giải phương trình (5):

$(5) \Leftrightarrow (m+2)x = m-5$.

m = –2 : (5) vô nghiệm

$m \neq -2$: (5) có nghiệm $x_2 = \dfrac{m-5}{m+2}$.

Nhận xét: Khi m = –2 thì $x_1 = \dfrac{3}{4}$.

Khi m = 2 thì $x_2 = -\dfrac{3}{4}$.

Vậy ta có kết luận:

$m \neq 2$ và $m \neq -2$: Phương trình (3) có hai nghiệm

$x_1 = \dfrac{m+5}{2-m}$ và $x_2 = \dfrac{m-5}{m+2}$

m = 2 : Phương trình (3) có nghiệm $x = -\dfrac{3}{4}$.

m = –2: Phương trình (3) có nghiệm $x = \dfrac{3}{4}$.

### III. Phương trình bậc nhất hai ẩn $ax + by = c$

**1. *Định nghĩa***

Phương trình bậc nhất hai ẩn là phương trình có dạng:

$$ax + by = c \qquad (6)$$

Trong đó x và y là hai ẩn ; a, b, c là các số đã cho, với điều kiện *a và b không đồng thời bằng 0.*

Nếu tồn tại hai số $x_0$ và $y_0$ sao cho $ax_0 + by_0 = c$ thì cặp $(x_0; y_0)$ được gọi là một *nghiệm* của phương trình (6).

Giải phương trình (6) là tìm tập nghiệm của nó.

**2. *Giải và biện luận***

Với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0, có ba khả năng xảy ra:

a) $a \neq 0$ và $b \neq 0$: Lúc đó:

$$ax + by = c \Leftrightarrow y = \frac{c - ax}{b}, x \in R$$

Vậy tập nghiệm của phương trình gồm các cặp số (x ; y):

$$\begin{cases} x \text{ là một số tùy ý} \\ y = \dfrac{c - ax}{b} \end{cases}$$

b) a = 0 và $b \neq 0$: Phương trình (6) có dạng 0x + by = c, trong trường hợp này nghiệm là các cặp số (x ; y):

$$\begin{cases} x \text{ là một số tùy ý} \\ y = \dfrac{c}{b} \end{cases}$$

c) $a \neq 0$ và b = 0: Phương trình (6) có dạng ax + 0y = c.

Khi đó nghiệm là các cặp số (x ; y):

$$\begin{cases} x = \dfrac{c}{a} \\ y \text{ là một số tùy ý} \end{cases}$$

* ***Chú ý:*** Ta cũng có thể viết các nghiệm (x ; y) trong trường hợp a) là $\begin{cases} x = \dfrac{c - by}{a} \\ y \text{ là một số tùy ý} \end{cases}$

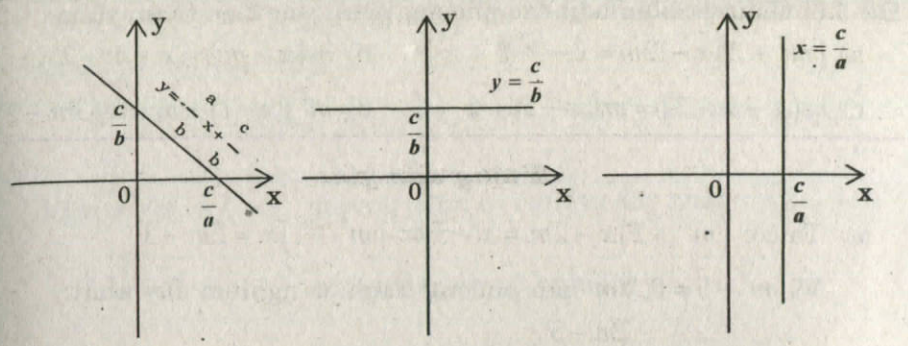
**3. *Biểu diễn hình học của tập nghiệm***

Ta biểu diễn hình học tập hợp các điểm M(x ; y) có tọa độ (x ; y) là nghiệm của phương trình (6).

❖ Với $b \neq 0$ phương trình được biến đổi thành $y = -\frac{a}{b}x + \frac{c}{b}$ (7). Tập hợp các điểm M là đồ thị của hàm số (7).

❖ Với b = 0 phương trình (6) trở thành $x = \frac{c}{a}$. Tập hợp điểm M là đường thẳng song song với trục tung và cắt trục hoành tại điểm $\frac{c}{a}$.






(a ≠ 0) (a = 0) (b = 0)

**4. *Ghi chú***

Ở trên ta đã xét phương trình $ax + by = c$ với điều kiện a và b không đồng thời bằng 0.

Nếu điều kiện này không được thỏa mãn thì ta có a = b = 0. Lúc đó phương trình (6) có dạng 0x + 0y = c (8)

Nếu $c \neq 0$: phương trình (8) vô nghiệm.

Nếu c = 0 : phương trình (8) nghiệm đúng với mọi cặp số (x ; y).

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 3.5:** Giải và biện luận phương trình: $m^2x - 3m^2 = 9(x - m)$ (1)

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $(1) \Leftrightarrow 9m^2 - 9x = 3m(m - 3)$ (2)

Ta thấy $m^2 - 9 \neq 0$ khi và chỉ khi $m \neq 3$ và $m \neq -3$.

Do đó:

* Nếu $m \neq 3$ và $m \neq -3$ thì (2) có nghiệm duy nhất

$$x = \frac{3m(m-3)}{m^2 - 9} = \frac{3m}{m+3}.$$

* Nếu m = 3 thì (2) trở thành 0x = 0, được nghiệm đúng với mọi $x \in R$.

* Nếu m = –3 thì (2) trở thành 0x = 5, vô nghiệm.

Vậy ta có kết luận:

$m \neq 3$ và $m \neq -3$: Phương trình (1) có nghiệm duy nhất $x = \frac{3m}{m+3}$.

m = 3: Phương trình (1) có tập nghiệm là R.

m = –3: Phương trình (1) vô nghiệm.

**Đề 3.6:** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $(m^2+2)x-2m=x-3$ b) $m(x-m)=x+m-2$

c) $m(x-m+3)=m(x-2)+6$ d) $m^2(x-1)+m=x(3m-2)$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $(m^2+2)x-2m=x-3 \Leftrightarrow (m^2+1)x=2m-3$

Vì $m^2+1\neq 0, \forall m$ nên phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{2m-3}{m^2+1}$$

b) $m(x-m)=x+m-2 \Leftrightarrow mx-x=m^2+m-2$

$\Leftrightarrow (m-1)x=(m-1)(m+2)$

❖ Nếu $m\neq 1$ thì phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{(m-1)(m+2)}{m-1}=m+2$$

❖ Nếu m = 1 thì phương trình trở thành 0x = 0

Phương trình có tập nghiệm S = R.

c) $m(x-m+3)=m(x-2)+6 \Leftrightarrow mx-m^2+3m=mx-2m+6$

$\Leftrightarrow 0x=m^2-5m+6 \Leftrightarrow 0x=(m-2)(m-3)$.

❖ Nếu m = 2 hoặc m = 3 thì phương trình có tập nghiệm S = R.

❖ Nếu $m\neq 2$ và $m\neq 3$ thì phương trình vô nghiệm: $S=\varnothing$.

d) $m^2(x-1)+m=x(3m-2) \Leftrightarrow m^2x-m^2+m=(3m-2)x$

$\Leftrightarrow (m^2-3m+2)x=m^2-m$

$\Leftrightarrow (m-1)(m-2)x=m(m-1)$

❖ Nếu $m\neq 1$ và $m\neq 2$ thì phương trình có nghiệm duy nhất:

$$x=\frac{m(m-1)}{(m-1)(m-2)}=\frac{m}{m-2}$$

❖ Nếu m = 1 ta có 0x = 0: phương trình có tập nghiệm S = R.

❖ Nếu m = 2 ta có 0x = 2: phương trình vô nghiệm $S=\varnothing$.

**Đề 3.7:** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $\frac{(m+1)x+m-2}{x+3}=m$ b) $\frac{mx-m-3}{x+1}=1$

c) $|x+m|=|x-m+2|$ d) $|x-m|=|x+1|$.

***Hướng dẫn giải***

a) Điều kiện: $x\neq -3$, phương trình đã cho tương đương với:

$(m+1)x+m-2=m(x+3) \Leftrightarrow x=2m+2$

$x=2m+2$ là nghiệm phương trình $\Leftrightarrow 2m+2\neq -3 \Leftrightarrow m\neq -\frac{5}{2}$.

Vậy: • Với $m\neq -\frac{5}{2}$ phương trình có nghiệm duy nhất x = 2m + 2.

• Với $m=-\frac{5}{2}$ phương trình vô nghiệm.

b) Điều kiện: $x\neq -1$, phương trình đã cho tương đương với:

$mx-m-3=x+1 \Leftrightarrow (m-1)x=m+4$ (1)

• Nếu m = 1 thì (1) $\Leftrightarrow$ 0x = 5 phương trình vô nghiệm.

• Nếu $m\neq 1$ thì (1) có nghiệm $x=\frac{m+4}{m-1}$.

$x=\frac{m+4}{m-1}$ là nghiệm của phương trình đã cho $\Leftrightarrow \frac{m+4}{m-1}\neq -1$

$\Leftrightarrow m+4\neq -m+1 \Leftrightarrow m\neq -\frac{3}{2}$

Vậy: $i)\begin{cases} m\neq -\frac{3}{2}: S=\left\{\frac{m+4}{m-1}\right\} \\ m\neq 1 \end{cases}; ii)\begin{cases} m=-\frac{3}{2}: S=\varnothing. \\ m=1 \end{cases}$

c) Ta có: $|x+m|=|x-m+2| \Leftrightarrow \begin{cases} x+m=x-m+2 \\ x+m=-x+m-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=1 \\ x=-1 \end{cases}$

Vậy: • Nếu m = 1 thì S = R.

• Nếu $m\neq 1$ thì $S=\{-1\}$.

d) $|x-m|=|x+1| \Leftrightarrow \begin{cases} x-m=x+1 \\ x-m=-x-1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m=-1 \\ x=\frac{m-1}{2} \end{cases}$

Vậy: • Nếu m = −1 thì S = R.

• Nếu $m\neq -1$ thì $S=\left\{\frac{m-1}{2}\right\}$.

**Đề 3.8:** Tìm công thức tổng quát nghiệm của mỗi phương trình sau và biểu diễn hình học tập nghiệm của nó:

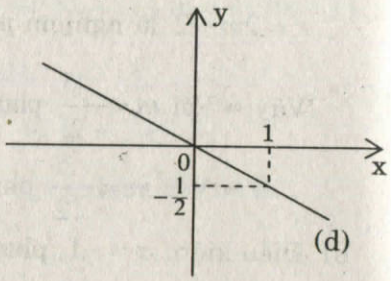
a) x + 2y = 0 b) 2x − y = 4.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $x + 2y = 0$ (1)

$\Leftrightarrow y = -\frac{1}{2}x$.

Vậy công thức tổng quát nghiệm của phương trình (1) là: $\begin{cases} x \in R \\ y = -\frac{1}{2}x \end{cases}$

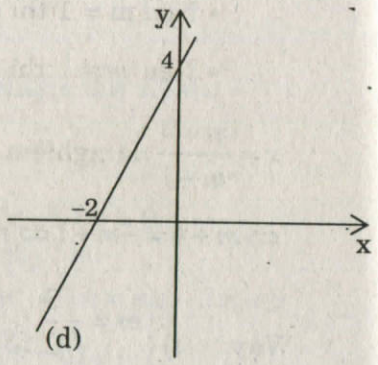



- Tập nghiệm của phương trình (1) được biểu diễn bởi đường thẳng $(d): y = -\frac{1}{2}x$.

b) Ta có: $2x - y = 4$ (2)

$\Leftrightarrow y = 2x + 4$.

Vậy công thức tổng quát nghiệm của phương trình (2) là: $\begin{cases} x \in R \\ y = 2x + 4 \end{cases}$




- Tập nghiệm của phương trình (2) được biểu diễn bởi đường thẳng (d): $y = 2x + 4$.

*
**

## §3. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn**

**1. *Khái niệm cơ bản***

Hệ phương trình bậc nhất hai ẩn có dạng:

$$(I)\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 & (1) \\ a_2x + b_2y = c_2 & (2) \end{cases}$$

trong đó (1) và (2) là những phương trình bậc nhất hai ẩn.

Nếu tồn tại cặp số $(x_0; y_0)$ đồng thời là nghiệm của cả hai phương trình (1) và (2) thì $(x_0; y_0)$ được gọi là một nghiệm của hệ.



*Giải* hệ phương trình là tìm tập nghiệm của nó.

* Các khái niệm hệ phương trình tương đương, hệ phương trình hệ quả cũng tương tự như đối với phương trình.

**2. *Giải và biện luận***

Ta có thể giải hệ (I) bằng phương pháp cộng hoặc bằng phương pháp thế.

**3. *Quy tắc Crame***

Xét hệ phương trình: $(I)\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Ta gọi biểu thức $D = a_1b_2 - a_2b_1$ là *định thức* của hệ phương trình (I) và kí hiệu: $D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$

Tương tự, kí hiệu: $D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$, $D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$.

a) Nếu $D \neq 0$: Hệ có nghiệm duy nhất $\begin{cases} x = \frac{D_x}{D} \\ y = \frac{D_y}{D} \end{cases}$

b) Nếu D = 0 và $\begin{bmatrix} Dx \neq 0 \\ Dy \neq 0 \end{bmatrix}$: Hệ vô nghiệm.

c) Nếu D = Dx = Dy = 0: Hệ có vô số nghiệm.

Để tìm nghiệm của hệ ta giải phương trình: $a_1x + b_1y = c_1$.

**** Ghi chú***

Nếu $a_1 = b_1 = 0$ hoặc $a_2 = b_2 = 0$ hoặc cả hai trường hợp đó xảy ra thì ta có các hệ phương trình đặc biệt sau:

$$\begin{cases} 0x + 0y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ 0x + 0y = c_2 \end{cases} \text{ hoặc } \begin{cases} 0x + 0y = c_1 \\ 0x + 0y = c_2 \end{cases}$$

Tùy theo các trường hợp $c_1, c_2$ khác 0 hay bằng 0, các hệ đó vô nghiệm hoặc có vô số nghiệm.

**4. *Biểu diễn hình học của tập nghiệm***

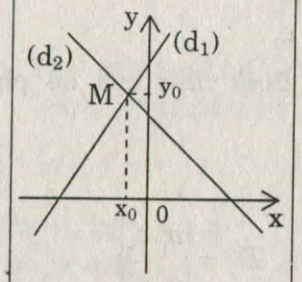
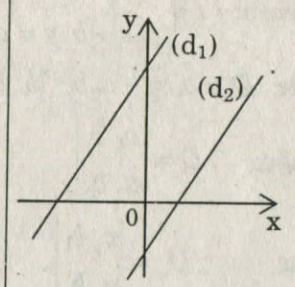
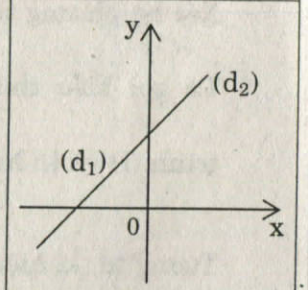
Chúng ta đã biết tập nghiệm của các phương trình (1) và (2) lần lượt được biểu diễn bởi hai đường thẳng, kí hiệu là $(d_1)$ và $(d_2)$. Do đó tập nghiệm của hệ (I) là tập các tọa độ điểm chung của $(d_1)$ và $(d_2)$.

❖ Hệ (I) có nghiệm duy nhất khi và chỉ khi $(d_1)$ và $(d_2)$ cắt nhau.

❖ Hệ (I) vô nghiệm khi và chỉ khi $(d_1)$ và $(d_2)$ song song với nhau.

❖ Hệ (I) có vô số nghiệm khi và chỉ khi $(d_1)$ và $(d_2)$ trùng nhau.

Nếu các hệ số khác 0 ta có bảng.

| $\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}$ | $\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}$ |
|---|---|---|
|   |   |   |
| Nghiệm duy nhất | Vô nghiệm | Vô số nghiệm |

## II. Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn

❖ Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn là hệ phương trình:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

trong đó x, y, z là ba ẩn, các chữ còn lại là các hệ số.

❖ Nghiệm của hệ phương trình là một bộ ba số $(x_0 ; y_0 ; z_0)$ nghiệm đúng cả ba phương trình của hệ.

**** Ghi chú***

1) Hệ ba phương trình bậc nhất ba ẩn vẫn có thể giải bằng phương pháp cộng, phương pháp thế. Ta thường khử trước một ẩn để đưa hệ về dạng hệ hai phương trình bậc nhất hai ẩn.
2) Có thể giải hệ ba phương trình bậc ba ẩn nhất bằng máy tính bỏ túi.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 3.9:** Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} 5x - 4y = 3 \\ 7x - 9y = 8 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases}$



c) $\begin{cases} \sqrt{3}x - y = 1 \\ 5x + \sqrt{2}y = \sqrt{3} \end{cases}$

d) $\begin{cases} (\sqrt{2}+1)x + y = \sqrt{2} - 1 \\ 2x - (\sqrt{2}-1)y = 2\sqrt{2} \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $D = \begin{vmatrix} 5 & -4 \\ 7 & -9 \end{vmatrix} = -17;\ Dx = \begin{vmatrix} 3 & -4 \\ 8 & -9 \end{vmatrix} = 5;\ Dy = \begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 19$

Vì $D \neq 0$ nên hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y)

với $\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} = \frac{-5}{17} \\ y = \frac{Dy}{D} = \frac{-19}{17} \end{cases}$

b) Ta có: $\begin{cases} \frac{3}{4}x + \frac{2}{3}y = 16 \\ \frac{5}{2}x - \frac{3}{5}y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 9x + 8y = 192 \\ 25x - 6y = 110 \end{cases}$

$D = \begin{vmatrix} 9 & 8 \\ 25 & -6 \end{vmatrix} = -254; Dx = \begin{vmatrix} 192 & 8 \\ 110 & -6 \end{vmatrix} = -2032; Dy = \begin{vmatrix} 9 & 192 \\ 25 & 110 \end{vmatrix} = -3810$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y) với $\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} = 8 \\ y = \frac{Dy}{D} = 15 \end{cases}$

c) Ta có: $D = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 5 & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{6} + 5$

$Dx = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ \sqrt{3} & \sqrt{2} \end{vmatrix} = \sqrt{2} + \sqrt{3};$

$Dy = \begin{vmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 5 & \sqrt{3} \end{vmatrix} = -2$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y) với $\begin{cases} x = \frac{Dx}{D} = \frac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}+5} \\ y = \frac{Dy}{D} = \frac{-2}{\sqrt{6}+5} \end{cases}$

d) Ta có: $D=\begin{vmatrix}\sqrt{2}+1 & 1\\ 2 & -(\sqrt{2}-1)\end{vmatrix}=-1-2=-3$

$Dx=\begin{vmatrix}\sqrt{2}-1 & 1\\ 2\sqrt{2} & -(\sqrt{2}-1)\end{vmatrix}=-(\sqrt{2}-1)^2-2\sqrt{2}=-3$

$Dy=\begin{vmatrix}\sqrt{2}+1 & \sqrt{2}-1\\ 2 & 2\sqrt{2}\end{vmatrix}=2\sqrt{2}(\sqrt{2}+1)-2(\sqrt{2}-1)=6$

Hệ phương trình có nghiệm duy nhất (x, y) với $\begin{cases}x=\dfrac{Dx}{D}=1\\ y=\dfrac{Dy}{D}=-2\end{cases}$.

**Đề 3.10:** Giải và biện luận các hệ phương trình sau theo tham số m:

a) $\begin{cases}mx+(m-1)y=m+1\\ 2x+my=2\end{cases}$

b) $\begin{cases}mx+(m-2)y=5\\ (m+2)x+(m+1)y=2\end{cases}$

c) $\begin{cases}(m-1)x+2y=3m-1\\ (m+2)x-y=1-m\end{cases}$

d) $\begin{cases}(m+4)x-(m+2)y=4\\ (2m-1)x+(m-4)y=m\end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $D=\begin{vmatrix}m & m-1\\ 2 & m\end{vmatrix}=m^2-2m+2$

$Dx=\begin{vmatrix}m+1 & m-1\\ 2 & m\end{vmatrix}=m(m+1)-2(m+1)=m^2-m+2$

$Dy=\begin{vmatrix}m & m+1\\ 2 & 2\end{vmatrix}=2m-2(m+1)=-2$

Vì $m^2-2m+2=(m-1)^2+1>0,\forall m$ nên hệ có nghiệm duy nhất

(x, y) với: $\begin{cases}x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{m^2-m+2}{m^2-2m+2}\\ y=\dfrac{Dy}{D}=-\dfrac{2}{m^2-2m+2}\end{cases}$



b) Ta có: $D=\begin{vmatrix}m & m-2\\ m+2 & m+1\end{vmatrix}=m(m+1)-(m-2)(m+2)$

$=m^2+m-m^2+4=m+4$

$Dx=\begin{vmatrix}5 & m-2\\ 2 & m+1\end{vmatrix}=5(m+1)-2(m-2)=3m+9$

$Dy=\begin{vmatrix}m & 5\\ m+2 & 2\end{vmatrix}=2m-5(m+2)=-3m-10$

i) $D\neq 0\Leftrightarrow m\neq -4$ hệ có nghiệm duy nhất (x, y)

với $\begin{cases}x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{3m+9}{m+4}\\ y=\dfrac{Dy}{D}=-\dfrac{3m+10}{m+4}\end{cases}$

ii) $D=0\Leftrightarrow m=-4$. Khi đó $Dx=-3\neq 0$ nên hệ phương trình vô nghiệm.

c) $D=\begin{vmatrix}m-1 & 2\\ m+2 & -1\end{vmatrix}=-m+1-2(m+2)=-3m-3=-3(m+1)$.

$Dx=\begin{vmatrix}3m-1 & 2\\ 1-m & -1\end{vmatrix}=-3m+1-2(1-m)=-m-1=-(m+1)$

$Dy=\begin{vmatrix}m-1 & 3m-1\\ m+2 & 1-m\end{vmatrix}=-(m-1)^2-(m+2)(3m-1)$

$=-4m^2-3m+1=(m+1)(1-4m)$

i) $D\neq 0\Leftrightarrow -3(m+1)\neq 0\Leftrightarrow m\neq -1$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y)

với: $\begin{cases}x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{-(m+1)}{-3(m+1)}=\dfrac{1}{3}\\ y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{(m+1)(1-4m)}{-3(m+1)}=\dfrac{4m-1}{3}\end{cases}$

ii) $D=0\Leftrightarrow m=-1$. Khi đó Dx = Dy = 0 và hệ trở thành:

$\begin{cases}-2x+2y=-4\\ x-y=2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ \text{tùy ý}\\ y=x-2\end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm (x, y) với $\begin{cases}x\ \text{tùy ý}\\ y=x-2\end{cases}$

d) Ta có: $D=\begin{vmatrix} m+4 & -(m+2) \\ 2m-1 & m-4 \end{vmatrix}=(m+4)(m-4)+(m+2)(2m-1)$

$=m^2-16+2m^2+3m-2=3m^2+3m-18$

$=3(m^2+m-6)=3(m-2)(m+3)$

$Dx=\begin{vmatrix} 4 & -(m+2) \\ m & m-4 \end{vmatrix}=4(m-4)+m(m+2)$

$=m^2+6m-16=(m-2)(m+8)$

$Dy=\begin{vmatrix} m+4 & 4 \\ 2m-1 & m \end{vmatrix}=m(m+4)-4(2m-1)$

$=m^2-4m+4=(m-2)^2$

i) $D\neq 0\Leftrightarrow 3(m-2)(m+3)\neq 0\Leftrightarrow m\neq 2$ và $m\neq -3$

Hệ có nghiệm duy nhất (x, y)

với: $\begin{cases} x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{(m-2)(m+8)}{3(m-2)(m+3)}=\dfrac{m+8}{3(m+3)} \\ y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{(m-2)^2}{3(m-2)(m+3)}=\dfrac{m-2}{3(m+3)} \end{cases}$

ii) $D=0\Leftrightarrow m=2\vee m=-3$

- Với m = -3 . Ta có $Dx=-25\neq 0$: hệ vô nghiệm.
- Với m = 2 . Khi đó D = Dx = Dy = 0 và hệ trở thành:

$\begin{cases} 6x-4y=4 \\ 3x-2y=2 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y=\dfrac{3x-2}{2} \end{cases}$.

Hệ có vô số nghiệm (x, y) với $\begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y=\dfrac{3x-2}{2} \end{cases}$.

**Đề 3.11:** Cho hệ phương trình: $(I)\begin{cases} mx+2y=m+1 \\ 2x+my=2m+5 \end{cases}$

a) Giải và biện luận hệ phương trình (I) theo tham số m.

b) Khi hệ (I) có nghiệm (x, y), tìm hệ thức giữa x và y độc lập đối với m.





a) Ta có: $D=\begin{vmatrix} m & 2 \\ 2 & m \end{vmatrix}=m^2-4$

$Dx=\begin{vmatrix} m+1 & 2 \\ 2m+5 & m \end{vmatrix}=m(m+1)-2(2m+5)=m^2-3m-10$

$=(m+2)(m-5)$

$Dy=\begin{vmatrix} m & m+1 \\ 2 & 2m+5 \end{vmatrix}=m(2m+5)-2(m+1)=2m^2+3m-2$

$=(m+2)(2m-1)$

i) $D\neq 0\Leftrightarrow m^2\neq 4\Leftrightarrow m\neq \pm 2$: hệ có nghiệm duy nhất (x, y)

với: $\begin{cases} x=\dfrac{Dx}{D}=\dfrac{(m+2)(m-5)}{m^2-4}=\dfrac{m-5}{m-2} \\ y=\dfrac{Dy}{D}=\dfrac{(m+2)(2m-1)}{m^2-4}=\dfrac{2m-1}{m-2} \end{cases}$

ii) $D=0\Leftrightarrow m=\pm 2$

+ Với m = 2 ta có: $Dx=-12\neq 0$: hệ vô nghiệm.

+ Với m = -2 ta có: $D=Dx=Dy=0$.

Hệ trở thành: $\begin{cases} -2x+2y=-1 \\ 2x-2y=1 \end{cases}\Leftrightarrow \begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y=\dfrac{2x-1}{2} \end{cases}$

Hệ có vô số nghiệm (x, y) với: $\begin{cases} x \text{ tùy ý} \\ y=\dfrac{2x-1}{2} \end{cases}$.

b) Ta có: $(I)\Leftrightarrow \begin{cases} m(x-1)=1-2y \\ m(y-2)=5-2x \end{cases}$

$\Rightarrow \begin{cases} m(x-1)(y-2)=(1-2y)(y-2) & (1) \\ m(y-2)(x-1)=(5-2x)(x-1) & (2) \end{cases}$

So sánh (1) và (2) ta được:

$(1-2y)(y-2)=(5-2x)(x-1)$

Đây là hệ thức giữa x và y độc lập đối với m.

**Đề 3.12:** Giải hệ phương trình: $(I)\begin{cases} x+y+z=2 & (1) \\ x+2y+3z=1 & (2) \\ 2x+y+3z=-1 & (3) \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $(1) \Leftrightarrow z=2-x-y$ (4)

Thế (4) vào (2) ta được:

$$x+2y+3(2-x-y)=1 \Leftrightarrow 2x+y=5 \quad (5)$$

Thế (4) vào (3) ta được:

$$2x+y+3(2-x-y)=-1 \Leftrightarrow x+2y=7 \quad (6)$$

Từ (5) và (6) ta có hệ: $(II)\begin{cases} 2x+y=5 \\ x+2y=7 \end{cases}$

Giải hệ (II) ta được: $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \end{cases}$

Thế vào (4) ta được z = –2.

Vậy nghiệm của hệ (I) là: $\begin{cases} x=1 \\ y=3 \\ z=-2 \end{cases}$

* *Ghi chú:* Có thể giải hệ phương trình (I) bằng máy tính bỏ túi.

*
**

# §4. PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Định nghĩa và công thức nghiệm

Phương trình bậc hai một ẩn là phương trình có dạng:

$$ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0) \quad (1)$$

trong đó x là ẩn số, a, b, c là các hệ số đã cho.

Cách giải và công thức nghiệm của phương trình (1) được cho trong bảng:



| Phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$ |
|---|
| Biệt thức $\Delta=b^2-4ac$. |
| $\Delta>0$: (1) có hai nghiệm $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. |
| $\Delta=0$: (1) có nghiệm kép $x=-\dfrac{b}{2a}$. |
| $\Delta<0$: (1) vô nghiệm. |

❖ ***Trường hợp đặc biệt***

1) Nếu a và c trái dấu thì phương trình (1) có 2 nghiệm phân biệt.

2) Nếu b = 2b' thì ta lập biệt thức $\Delta'=b'^2-ac$.

Khi đó:

- $\Delta'>0$: (1) có hai nghiệm $x_{1,2}=\dfrac{-b'\pm\sqrt{\Delta'}}{a}$.
- $\Delta'=0$: (1) có nghiệm kép $x=-\dfrac{b'}{a}$.
- $\Delta'<0$: (1) vô nghiệm.

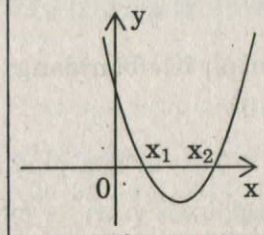
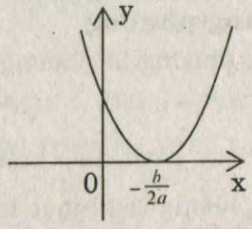
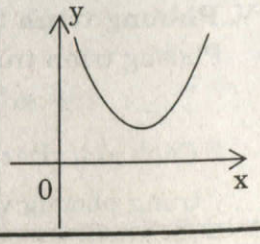
* ***Ghi chú***.

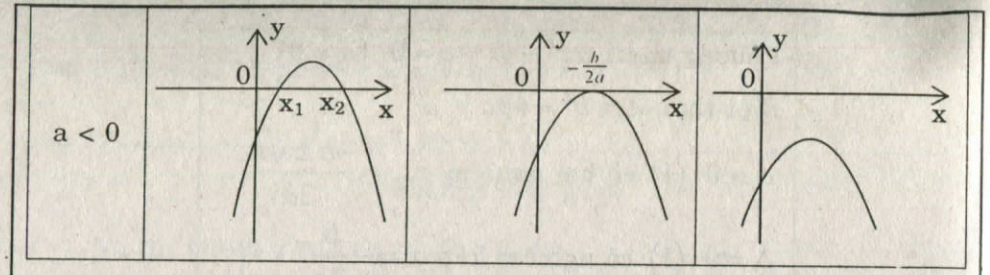
Có thể giải phương trình bậc hai bằng máy tính bỏ túi.

### II. Minh họa bằng đồ thị

Ta có thể dùng đồ thị của hàm số bậc hai để minh họa việc tìm nghiệm của phương rtình bậc hai như sau:

Giải phương trình $ax^2+bx+c=0 \ (a\neq 0)$ là tìm hoành độ các giao điểm của parabol $y=ax^2+bx+c$ với trục hoành. Ta có:

| a \ Δ | Δ > 0 | Δ = 0 | Δ < 0 |
|---|---|---|---|
| a > 0 |   |   |   |




* ***Ghi chú:*** Đôi khi ta biến đổi phương trình bậc hai về dạng: $ax^2 + bx = -c$ rồi xét giao điểm của parabol $y = ax^2 + bx$ với đường thẳng y = –c.

## III. Định lí Viét

### 1. *Định lí*

*Nếu phương trình bậc hai* $ax^2 + bx + c = 0 \ (a \neq 0)$ *có hai nghiệm* $x_1$ *và* $x_2$ *thì tổng và tích của hai nghiệm đó là:*

$$S = x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}, \qquad P = x_1 x_2 = \frac{c}{a}.$$

### 2. *Ứng dụng*

a) * Nếu các hệ số của phương trình (1) thỏa mãn điều kiện a + b + c = 0 thì phương trình bậc hai có một nghiệm $x_1 = 1$ và nghiệm kia là $x_2 = \frac{c}{a}$.

* Nếu các hệ số thỏa mãn điều kiện a – b + c = 0 thì phương trình bậc hai có một nghiệm $x_1 = -1$ và nghiệm kia là $x_2 = -\frac{c}{a}$.

b) Tìm hai số biết tổng và tích của chúng.

Nếu hai số có tổng bằng S và tích bằng P thì chúng là nghiệm của phương trình: $x^2 - Sx + P = 0$

* ***Chú ý:*** Điều kiện để phương trình $x^2 - Sx + P = 0$ có nghiệm là $\Delta = S^2 - 4P \geq 0$ hay $S^2 \geq 4P$. Đó cũng là điều kiện để tồn tại hai số có tổng là S và tích là P.

## IV. Phương trình trùng phương

Phương trình trùng phương là phương trình bậc bốn dạng:

$$ax^4 + bx^2 + c = 0 \qquad (a \neq 0)$$

* *Cách giải:* Đặt $y = x^2$, với điều kiện $y \geq 0$, ta đưa phương trình trùng phương về phương trình bậc hai đối với y: $ay^2 + by + c = 0$.



## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 3.13:** Dùng công thức nghiệm của phương trình bậc hai để giải các phương trình sau:

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$
b) $3x^2 + 4x - 7 = 0$
c) $3x^2 + 4x + 12 = 0$
d) $x^2 - 8x + 16 = 0$
e) $t^2 + 5t + 6 = 0$
f) $2t^2 - 5t - 3 = 0$
g) $t^2 + 12t + 36 = 0$
h) $t^2 + t - 1 = 0$

***Hướng dẫn giải***

a) $x^2 + 5x - 6 = 0$

Phương trình có các hệ số: $a = 1$, b = 5, c = –6

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 25 - 4.1.(-6) = 49$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 - 7}{2} = -6$$

và $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-5 + 7}{2} = 1.$$

b) $3x^2 + 4x - 7 = 0$

Phương trình có các hệ số: $a = 3$, b = 4, c = –7

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.3.(-7) = 100$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 - 10}{6} = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3}$$

và $$x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-4 + 10}{6} = 1.$$

c) $3x^2 + 4x + 12 = 0$

Phương trình có các hệ số: $a = 3$, b = 4, c = 12

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4.3.12 = -128$

Vậy phương trình vô nghiệm.

d) $x^2 - 8x + 16 = 0$

Phương trình có các hệ số: $a = 1$, b = –8, c = 16

Ta có: $\Delta = b^2 - 4ac = 64 - 4.1.16 = 0$

Vậy phương trình có nghiệm kép:

$$x_1 = x_2 = -\frac{b}{2a} = -\frac{-8}{2} = 4.$$

e) $t^2+5t+6=0$

Phương trình có các hệ số: $a=1$, b = 5, c = 6

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=25-4.1.6=1$

Vậy phương trình có hai nghiệm:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5-1}{2}=-3$$

và $$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-5+1}{2}=-2$$

f) $2t^2-5t-3=0$

Phương trình có các hệ số: $a=2$, b = −5, c = −3

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=25-4.2.(-3)=49$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5-7}{4}=-\frac{1}{2}$$

và $$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{5+7}{4}=3.$$

g) $t^2+12t+36=0$

Phương trình có các hệ số: $a=1$, b = 12, c = 36

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=144-4.1.36=0$

Vậy phương trình có nghiệm kép:

$$t_1=t_2=-\frac{b}{2a}=-\frac{12}{2}=-6.$$

h) $t^2+t-1=0$

Phương trình có các hệ số: $a=1$, b = 1, c = −1

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=1-4.1.(-1)=5$

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$t_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

và $$t_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}.$$

**Đề 3.14:** Giải các phương trình:

a) $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$ b) $\sqrt{3}x^2+(5+\sqrt{3})x+5=0.$

***Hướng dẫn giải***

a) $x^2-(1+\sqrt{2})x+\sqrt{2}=0$

Phương trình có các hệ số: $a=1$, $b=-(1+\sqrt{2})$, $c=\sqrt{2}$



Ta có: $\Delta=b^2-4ac=\left[-(1+\sqrt{2})\right]^2-4.1.\sqrt{2}x^2+5x-6=0$

$$=1-2\sqrt{2}+(\sqrt{2})^2=(1-\sqrt{2})^2$$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(1-\sqrt{2})^2}=|1-\sqrt{2}|=\sqrt{2}-1$ (vì $\sqrt{2}-1>0$)

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(1+\sqrt{2})-(\sqrt{2}-1)}{2}=1$$

và $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{(1+\sqrt{2})+(\sqrt{2}-1)}{2}=\sqrt{2}.$$

b) $\sqrt{3}x^2+(5+\sqrt{3})x+5=0$

Phương trình có các hệ số: $a=\sqrt{3}, b=5+\sqrt{3}, c=5$

Ta có: $\Delta=b^2-4ac=(5+\sqrt{3})^2-4.\sqrt{3}.5=5^2+10\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2-20\sqrt{3}$

$$=5^2-10\sqrt{3}+(\sqrt{3})^2=(5-\sqrt{3})^2$$

$\Rightarrow\sqrt{\Delta}=\sqrt{(5-\sqrt{3})^2}=|5-\sqrt{3}|=5-\sqrt{3}$ (Vì: $5-\sqrt{3}>0$).

Vậy phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(5+\sqrt{3})-(5-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}=-\frac{5}{\sqrt{3}}$$

và $$x_2=\frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}=\frac{-(5+\sqrt{3})+(5-\sqrt{3})}{2\sqrt{3}}=-1.$$

**Đề 3.15:** Hãy lập một phương trình bậc hai với hệ số nguyên và có hai nghiệm là 5 và $\frac{2}{3}$.

***Hướng dẫn giải***

Phương trình bậc hai có hai nghiệm là 5 và $\frac{2}{3}$ là:

$$(x-5)\left(x-\frac{2}{3}\right)=0\Leftrightarrow(x-5)(3x-2)=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-2x-15x+10=0$$

$$\Leftrightarrow 3x^2-17x+10=0$$

Đây là phương trình có hệ số nguyên cần tìm.

**Đề 3.16:** Giải và biện luận theo tham số m phương trình:

$$mx^2+(2m-3)x-5m=0.$$

***Hướng dẫn giải***

❖ Nếu m = 0 thì phương trình đã cho trở thành $-3x = 0$. Vậy nghiệm là x = 0.

❖ Nếu $m \neq 0$ thì phương trình đã cho là một phương trình bậc hai, có $ac=-5m^2<0$, nên phương trình có hai nghiệm phân biệt.

Ta có: $\Delta=(2m-3)^2+20m^2=24m^2-12m+9$

Do đó: $x_1=\dfrac{3-2m+\sqrt{24m^2-12m+9}}{2m}$

$x_2=\dfrac{3-2m-\sqrt{24m^2-12m+9}}{2m}$.

**Đề 3.17:** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $mx^2-2(m+3)x+m+1=0$ b) $(m-1)x^2+(2-m)x-1=0$.

***Hướng dẫn giải***

a) * $m = 0$ thì phương trình đã cho trở thành $-6x+1=0 \Leftrightarrow x=\dfrac{1}{6}$.

* $m \neq 0: \Delta'=(m+3)^2-m(m+1)=5m+9$.

Với $m<-\dfrac{9}{5}$ thì $\Delta'<0$: phương trình vô nghiệm.

Với $m=-\dfrac{9}{5}$ thì $\Delta'=0$: phương trình có nghiệm kép:

$x_1=x_2=\dfrac{m+3}{m}=-\dfrac{2}{3}$.

Với $m>-\dfrac{9}{5}$ thì $\Delta'>0$: phương trình có hai nghiệm phân biệt:

$x_{1,2}=\dfrac{m+3\pm\sqrt{5m+9}}{m}$.

b) * $m = 1$ thì phương trình đã cho trở thành $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$

* $m \neq 1$ phương trình có dạng: a + b + c = 0

nên có hai nghiệm $x_1=1;\ x_2=\dfrac{1}{1-m}$.



**Đề 3.18:** Một khu vườn hình chữ nhật có diện tích 240m$^2$. Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì diện tích khu vườn không đổi. Tính kích thước của khu vườn.

***Hướng dẫn giải***

Gọi x(m) là chiều dài của khu vườn. Điều kiện: x > 4.

Khi đó chiều rộng của khu vườn là: $\dfrac{240}{x}(m)$

Nếu tăng chiều rộng 3m và giảm chiều dài 4m thì kích thước của khu vườn mới là: $\dfrac{240}{x}+3(m)$ và x – 4 (m).

Do diện tích không đổi nên ta có phương trình:

$$\left(\frac{240}{x}+3\right)(x-4)=240 \Leftrightarrow x^2-4x-320=0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=20 \\ x=-16\ (loại) \end{array}\right.$$

Vậy: Chiều dài khu vườn là : 20m.

Chiều rộng khu vườn là : 12m.

**Đề 3.19:** Với mỗi phương trình sau, biết một nghiệm, tìm m và nghiệm còn lại:

a) $x^2-mx+21=0$, một nghiệm là 7.

b) $x^2-9x+m=0$, một nghiệm là –3.

c) $(m-3)x^2-25x+32=0$, một nghiệm là 4.

***Hướng dẫn giải***

a) Gọi nghiệm thứ hai là $x_2$.

Theo định lí Viét ta có: $\begin{cases} 7+x_2=m \\ 7x_2=21 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2=3 \\ m=10 \end{cases}$.

b) Đáp số: $x_2=12; m=-36$.

c) Đáp số: $x_2=\dfrac{32}{17}; m=\dfrac{29}{4}$.

**Đề 3.20:** Tìm hai số có:

a) Tổng là 19, tích là 84; b) Tổng là 5, tích là –24.

c) Tổng là –10, tích là 16.

### *Hướng dẫn giải*

a) Hai số có tổng bằng 19, tích bằng 84, là nghiệm của phương trình:

$$x^2-19x+84=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=12 \\ x=7 \end{array}\right.$$

Hai số cần tìm là 7 ; 12.

b) Hai số có tổng bằng 5, tích bằng –24 là nghiệm của phương trình:

$$x^2-5x-24=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=8 \\ x=-3 \end{array}\right.$$

Hai số cần tìm là –3 ; 8.

c) Hai số có tổng bằng –10 , tích bằng 16 là nghiệm của phương trình:

$$x^2+10x+16=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x=-8 \\ x=-2 \end{array}\right.$$

Hai số là: –8 ; –2.

**Đề 3.21:** Cho phương trình: $(m+1)x^2-2(m-1)x+m-2=0$ (1)

a) Xác định m để phương trình có hai nghiệm phân biệt.

b) Xác định m để phương trình có một nghiệm bằng 2 và tính nghiệm kia.

c) Xác định m để tổng bình phương các nghiệm bằng 2.

### *Hướng dẫn giải*

a) Phương trình (1) có hai nghiệm phân biệt:

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m+1\neq 0 \\ \Delta'>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq -1 \\ (m-1)^2-(m+1)(m-2)>0 \end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq -1 \\ -m+3>0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq -1 \\ m<3 \end{array}\right.$$

b) Phương trình (1) có một nghiệm bằng 2 khi

$$(m+1)2^2-2(m-1).2+m-2=0 \Leftrightarrow m=-6$$

Nghiệm còn lại là: $x_2=S-2=\dfrac{2(m-1)}{m+1}-2=\dfrac{2(-7)}{-5}-2=\dfrac{4}{5}$.

c) Điều kiện để phương trình có hai nghiệm:

$$\left\{\begin{array}{l} m+1\neq 0 \\ \Delta'\geq 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} m\neq -1 \\ m\leq 3 \end{array}\right. \quad (*)$$



Áp dụng định lí Viét ta có: $\left\{\begin{array}{l} x_1+x_2=\dfrac{2(m-1)}{m+1} \\ x_1x_2=\dfrac{m-2}{m+1} \end{array}\right.$

Ta có $x_1^2+x_2^2=2 \Leftrightarrow (x_1+x_2)^2-2x_1x_2=2$

$$\Leftrightarrow \frac{4(m-1)^2}{(m+1)^2}-\frac{2(m-2)}{m+1}=2 \Leftrightarrow 2(m-1)^2-(m-2)(m+1)=(m+1)^2$$

$\Leftrightarrow m=\dfrac{3}{5}$ (thỏa điều kiện (*))

Vậy: $m=\dfrac{3}{5}$.

**Đề 3.22:** Giải các phương trình sau:

a) $x^4-2x^2-3=0$ b) $x^4-11x^2+5=0$

c) $5x^4+x^2+1=0$ d) $x^4+8x^2+7=0$.

### *Hướng dẫn giải*

a) $x^4-2x^2-3=0$ (1)

Đặt: $t=x^2$. Điều kiện: $t\geq 0$.

Khi đó: (1) $\Leftrightarrow t^2-2t-3=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=3 \end{array}\right.$

+ Nghiệm t = –1 không thỏa điều kiện

+ Với: t = 3 $\Leftrightarrow x^2=3 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{3}$

Vậy phương trình có 2 nghiệm: $x_1=-\sqrt{3}$ và $x_2=\sqrt{3}$.

b) $x^4-11x^2+5=0$ (2)

Đặt: $t=x^2$. Điều kiện: $t\geq 0$

Khi đó: (2) $\Leftrightarrow 2t^2-11t+5=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=\dfrac{1}{2} \\ t=5 \end{array}\right.$

+ Với: $t=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

+ Với: t = 5 $\Leftrightarrow x^2=5 \Leftrightarrow x=\pm\sqrt{5}$

Vậy phương trình có 4 nghiệm:

$$x_1=-\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_2=\frac{\sqrt{2}}{2},\ x_3=-\sqrt{5} \text{ và } x_4=\sqrt{5}.$$

c) $5x^4+x^2+1=0$ (3)

Đặt: $t=x^2$. Điều kiện: $t\geq 0$

Khi đó: (3) $\Leftrightarrow 5t^2+t+1=0$

Phương trình này vô nghiệm.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

d) $x^4+8x^2+7=0$ (4)

Đặt: $t=x^2$. Điều kiện: $t\geq 0$

Khi đó: (4) $\Leftrightarrow t^2+8t+7=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} t=-1 \\ t=-7 \end{array}\right.$

Cả hai nghiệm theo t đều không thỏa điều kiện.

Vậy phương trình đã cho vô nghiệm.

*
**

## §5. HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HAI ẨN

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Hệ gồm một phương trình bậc hai và một phương trình bậc nhất hai ẩn**

***Ví dụ:*** $\begin{cases} 3x^2+2y^2-2xy+3x+4y-20=0 & (1) \\ x+3y-5=0 & (2) \end{cases}$

là một hệ phương trình gồm một phương trình bậc hai và một phương trình bậc nhất hai ẩn.

- *Cách giải:*
  - * Từ phương trình (2) rút một ẩn x hoặc y theo ẩn còn lại.
  - * Thế vào phương trình (1) để đưa phương trình (1) về phương trình một ẩn.

**II. Hệ phương trình đối xứng**

Là hệ phương trình mà khi thay x bởi y và thay y bởi x thì mỗi phương trình của hệ không thay đổi.

***Ví dụ:*** $\begin{cases} x^2+xy+y^2=4 \\ x+y+xy=2 \end{cases}$

- *Cách giải:* * S = x + y ; P = xy
  - * Đưa hệ đã cho về hệ có hai ẩn S, P.
  - * Tìm S và P.

Khi đó x, y là nghiệm của phương trình: $X^2-SX+P=0$.

**** Chú ý:*** 1) Điều kiện để hệ có nghiệm là: $S^2-4P\geq 0$.

2) $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy=S^2-2P$.



### B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 3.23:** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2+xy=4 & (1) \\ x-y+2=0 & (2) \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $(2) \Leftrightarrow y=x+2$

Thay vào phương trình (1) ta được:

$$x^2+x(x+2)=4 \Leftrightarrow 2x^2+2x-4=0$$
$$\Leftrightarrow x_1=1; x_2=-2$$

Thay giá trị tương ứng của x vào biểu thức y = x + 2 ta được:

$$y_1=3; y_2=0$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=3 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_1=-2 \\ y_2=0 \end{cases}$.

**Đề 3.24:** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 3x^2+2y^2-3xy+3x+4y-20=0 & (1) \\ x+3y-5=0 & (2) \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $(2) \Leftrightarrow x=5-3y$

Thay vào (1) và rút gọn, ta được:

$$35y^2-105y+70=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll} y_1=1 & (x_1=2) \\ y_2=2 & (x_2=-1) \end{array}\right.$$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1=2 \\ y_1=1 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_2=-1 \\ y_2=2 \end{cases}$.

**Đề 3.25:** Cho hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=6 & (1) \\ x^2+y^2=m & (2) \end{cases}$. Tìm m để:

a) Hệ vô nghiệm.

b) Hệ có nghiệm duy nhất.

c) Hệ có hai nghiệm phân biệt.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $(1) \Leftrightarrow y=6-x$

Thay vào (2) ta được:

$$x^2+(6-x)^2=m \Leftrightarrow 2x^2-12x+36-m=0 \quad (*)$$

Ta có: $\Delta' = 36 - 2(36 - m) = 2m - 36$

Vậy:

a) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow$ (*) vô nghiệm

$\Leftrightarrow \Delta' < 0$

$\Leftrightarrow 2m - 36 < 0$

$\Leftrightarrow m < 18$

b) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow$ (*) có nghiệm kép

$\Leftrightarrow \Delta' = 0$

$\Leftrightarrow 2m - 36 = 0$

$\Leftrightarrow m = 18$

c) Hệ có hai nghiệm phân biệt $\Leftrightarrow$ (*) có hai nghiệm phân biệt.

$\Leftrightarrow \Delta' > 0$

$\Leftrightarrow 2m - 36 > 0$

$\Leftrightarrow m > 18.$

**Đề 3.26:** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 4 \\ x + y + xy = 2 \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

Đặt: S = x + y ; P = xy.

Khi đó: Hệ đã cho $\Leftrightarrow \begin{cases} (x+y)^2 - xy = 4 \\ (x+y) + xy = 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} S^2 - P = 4 \\ S + P = 2 \end{cases}$

Giải hệ này ta được hai nghiệm: $\begin{cases} S_1 = 2 \\ P_1 = 0 \end{cases}$ và $\begin{cases} S_2 = -3 \\ P_2 = 5 \end{cases}$

• Với $\begin{cases} S_1 = 2 \\ P_1 = 0 \end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình:

$X^2 - 2X = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 0 \\ X_2 = 2 \end{cases}$

Vậy hệ đã cho có hai nghiệm: $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = 2 \end{cases}$ và $\begin{cases} x_2 = 2 \\ y_2 = 0 \end{cases}$



• Với $\begin{cases} S_2 = -3 \\ P = 5 \end{cases}$ thì x, y là nghiệm của phương trình:

$X^2 + 3X + 5 = 0$

Phương trình này vô nghiệm.

Tóm lại hệ đã cho có hai nghiệm: (0 ; 2), (2 ; 0).

**Đề 3.27:** Giải các hệ phương trình:

a) $\begin{cases} x + xy + y = 11 \\ x^2 + y^2 - xy - 2(x+y) = -31 \end{cases}$

b) $\begin{cases} x + y = 4 \\ x^2 + xy + y^2 = 13 \end{cases}$

c) $\begin{cases} xy = 4 \\ x^2 + y^2 = 28 \end{cases}$

d) $\begin{cases} xy + x + y = 5 \\ x^2 + y^2 + x + y = 8 \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

a) Đặt S = x + y ; P = xy: Hệ trở thành:

$\begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 2P - P - 2S = -31 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S + P = 11 \\ S^2 - 3P - 2S = -31 \end{cases}$

Thay P = 11 – S vào phương trình thứ hai ta được:

$S^2 - 3(11 - S) - 2S = -31 \Leftrightarrow S^2 + S - 2 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} S = 1 \\ S = -2 \end{cases}$

i) Với S = 1 thì P = 11 – S = 10, khi đó hệ vô nghiệm vì:

$S^2 - 4P = 1 - 40 = -39 < 0$

ii) Với S = –2 thì P = 11 – S = 13, khi đó hệ cũng vô nghiệm vì:

$S^2 - 4P = 4 - 52 = -48 < 0.$

Vậy hệ đã cho vô nghiệm.

b) Đặt S = x + y, P = xy ta có hệ:

$\begin{cases} S = 4 \\ S^2 - 2P + P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ S^2 - P = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S = 4 \\ P = 3 \end{cases}$

Vậy x, y là nghiệm phương trình:

$X^2 - 4X + 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X_1 = 1 \\ X_2 = 3 \end{cases}$

Vậy hệ có hai nghiệm: (1 ; 3), (3 ; 1).

c) Đặt S = x + y, P = xy ta có hệ: $\begin{cases} P = 4 \\ S^2 - 2P = 28 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} P = 4 \\ S = \pm 6 \end{cases}$

❖ Với S = 6, P = 4 thì x, y là nghiệm phương trình:

$X^2 - 6X + 4 = 0 \Leftrightarrow X = 3 \pm \sqrt{5}.$

Ta có hai nghiệm $\left(3 - \sqrt{5}; 3 + \sqrt{5}\right), \left(3 + \sqrt{5}; 3 - \sqrt{5}\right).$

❖ Với S = −6, P = 4 thì x, y là nghiệm phương trình:

$$X^2+6X+4=0 \Leftrightarrow X=-3\pm\sqrt{5}.$$

Ta có hai nghiệm $\left(-3-\sqrt{5};-3+\sqrt{5}\right),\left(-3+\sqrt{5};-3-\sqrt{5}\right)$.

Vậy hệ có bốn nghiệm:

$$\left(3-\sqrt{5};3+\sqrt{5}\right);\ \left(3+\sqrt{5};3-\sqrt{5}\right);$$

$$\left(-3-\sqrt{5};-3+\sqrt{5}\right);\ \left(-3+\sqrt{5};-3-\sqrt{5}\right).$$

d) Đặt S = x + y, P = xy ta có hệ:

$$\begin{cases}S+P=5\\S^2-2P+S=8\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}P=5-S\\S^2-2(5-S)+S=8\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}P=5-S\\S^2+3S-18=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}S=3\\P=2\end{cases}\vee\begin{cases}S=-6\\P=11\end{cases}$$

i) Với S = 3, P = 2: x, y là nghiệm phương trình:

$$X^2-3X+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}X_1=1\\X_2=2\end{array}\right.$$

Ta có hai nghiệm: (1 ; 2), (2 ; 1).

ii) Với S = -6, P = 11 hệ vô nghiệm vì:

$$S^2-4P=36-44=-8<0.$$

Vậy hệ có hai nghiệm (1 ; 2), (2 ; 1).

*
**

# TOÁN TRẮC NGHIỆM

## ĐỀ 11: KHÁI NIỆM PHƯƠNG TRÌNH

**1.** Cho hai phương trình: $x^2+x+1=0$ (1)

và $\sqrt{1-x}=\sqrt{x-1}+2$ (2)

Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) (1) và (2) tương đương.

b) Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).

c) Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

d) Cả a, b, c đều đúng.

**2.** Cho hai phương trình: $\sqrt{x-1}(x-2)=0$ (1)

và $x+\sqrt{x-1}=1+\sqrt{x-1}$ (2)



Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) (1) và (2) tương đương.

b) Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).

c) Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

d) Cả a, b, c đều sai.

**3.** Cho hai phương trình: $\dfrac{x}{\sqrt{x+1}}=\dfrac{2}{\sqrt{x+1}}$ (1)

và $x^2-x-2=0$ (2)

Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) (1) và (2) tương đương.

b) Phương trình (2) là hệ quả của phương trình (1).

c) Phương trình (1) là hệ quả của phương trình (2).

d) Cả a, b, c đều sai.

**4.** Để giải phương trình: $x+\dfrac{1}{x+2}=-\dfrac{2x+3}{x+2}$. Một học sinh làm qua các bước sau:

(I) Điều kiện $x\neq -2$.

(II) Với điều kiện trên: (1) $\Leftrightarrow x(x+2)+1=-(2x+3)$ (2)

(III) $(2)\Leftrightarrow x^2+4x+4=0\Leftrightarrow x=-2$.

Vậy phương trình (1) có tập nghiệm $S=\{-2\}$.

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì sai từ bước nào?

a) Từ (I) b) Từ (II)

c) Ở (III) d) Cả (I), (II), (III) đều đúng.

**5.** Cho phương trình: $\sqrt{x-2}(x^2-3x+2)=0$ (1)

Tập nghiệm của phương trình (1) là:

a) $\varnothing$ b) $\{1\}$ c) $\{2\}$ d) $\{1;2\}$.

**6.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\sqrt{x-2}=\sqrt{2-x}$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) Vô số nghiệm.

**7.** Phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $|x-2|=2-x$.

a) 0 b) 1 c) 2 d) Vô số nghiệm.

**8.** Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm x = 1.

a) $x^2+x+1=0$ b) $x^4-4x^2+4=0$

c) $x^5+3x^2+x-5=0$ d) $\sqrt{x-2}+x=1+\sqrt{x-2}$.

**9.** Tìm tập nghiệm của phương trình: $x-\sqrt{x-3}=\sqrt{3-x}+3$.

a) $S=\varnothing$ b) $S=\{3\}$

c) $S=[3;+\infty)$ d) Một đáp số khác.

**10.** Tìm tập nghiệm của phương trình: $x+\sqrt{x}=\sqrt{x}-1$.

a) $S=\varnothing$. b) $S=\{-1\}$.

c) $S=\{0\}$. d) Một đáp số khác.

## ĐỀ 12: PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT MỘT ẨN VÀ HAI ẨN

**1.** Chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) Phương trình: 3x + 5 = 0 có nghiệm là $x=-\frac{5}{3}$.

b) Phương trình: 0x – 7 = 0 vô nghiệm.

c) Phương trình: 0x + 0 = 0 có tập nghiệm là R.

d) Cả a, b, c đều đúng.

**2.** Phương trình $(m^2-m)x+m-3=0$ là phương trình bậc nhất khi và chỉ khi:

a) $m\neq 0$ b) $m\neq 1$

c) $m\neq 0$ hoặc $m\neq 1$ d) $m\neq 0$ và $m\neq 1$.

**3.** Tìm m để phương trình sau có tập nghiệm là R: $(m^2+3m)x+m+3=0$.

a) m = 0 b) m = –3

c) m = 0 và m = –3 d) Một đáp số khác.

**4.** Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:

$(m^2-3m+2)x+m^2-4m+3=0$.

a) m = 1 b) m = 2

c) m = 3 d) Một đáp số khác.

**5.** Tập nghiệm T của phương trình $\frac{(m^2+2)x+2m}{x}=2$ trong trường hợp $m\neq 0$ là:

a) $T=\left\{-\frac{2}{m}\right\}$ b) $T=\varnothing$.

c) T = R d) Cả ba câu trên đều sai.



**6.** Tìm m để phương trình sau vô nghiệm: $\frac{2x-m}{x-2}=m-1$ (m là tham số).

a) m = 3 b) m = 4

c) m = 3 hoặc m = 4 d) Một đáp số khác.

**7.** Tìm a, b để phương trình sau vô nghiệm: $(a-3)x+b=2$.

a) a = 3, b tùy ý b) a tuỳ ý , b = 2

c) a = 3, b = 2 d) a = 3, $b\neq 2$.

**8.** Tập nghiệm T của phương trình: $|x-2|=2-x$ là:

a) $T=\{2\}$ b) $T=(-\infty;2]$

c) $T=(-\infty;2)$ d) T = R.

**9.** Tập nghiệm T của phương trình: $\frac{|x-3|}{\sqrt{x-4}}=\frac{x-3}{\sqrt{x-4}}$ là:

a) $T=[3,+\infty)$ b) $T=[4,+\infty)$

c) $T=(4,+\infty)$ d) $T=\varnothing$.

**10.** Tập nghiệm của phương trình: 2x + y = 4 gồm các cặp số (x, y) với :

a) $\begin{cases}x \text{ tùy ý}\\ y=4-2x\end{cases}$ b) $\begin{cases}x=2-\frac{y}{2}\\ y \text{ tùy ý}\end{cases}$

c) $\begin{cases}x=0\\ y=4\end{cases}$ d) Cả a và b đều đúng.

Hãy chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định trên .

## ĐỀ 13: HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT NHIỀU ẨN

**1.** Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases}5x+2y=9\\ x+y=3\end{cases}$. Đáp số là:

a) (2 ; 1) b) (–1 ; –2)

c) (1 ; 2) d) (–2 ; –1).

**2.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases}2(x+y)+3(x-y)=4\\ (x+y)+2(x-y)=5\end{cases}$. Đáp số là:

a) $\left(\frac{1}{2};\frac{13}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{13}{2}\right)$

c) $\left(\frac{13}{2};\frac{1}{2}\right)$ d) $\left(-\frac{13}{2};-\frac{1}{2}\right)$.

**3.** Tìm m và n để đa thức sau (với biến số x) là đa thức 0:

$$P(x)=(2m+n-5)x+(5m-n-9)$$

a) m = 1 ; n = 2 b) m = –2 ; n = –1

c) m = –1 ; n = –2 d) m = 2 ; n = 1.

**4.** Vừa gà vừa chó
Bó lại cho tròn
Ba mươi sáu con
Một trăm chân chẵn.
Hỏi có mấy con gà, mấy con chó?

a) 12 gà, 24 chó b) 14 gà, 22 chó

c) 22 gà, 14 chó d) Một đáp số khác.

**5.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm duy nhất:

$$\begin{cases} mx+3y=2m-1 \\ x+(m+2)y=m+3 \end{cases}$$

a) $m\neq 1$ b) $m\neq -3$

c) $m\neq 1$ hoặc $m\neq -3$ d) $m\neq 1$ và $m\neq -3$.

**6.** Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\begin{cases} x+2y=1 \\ 3x+6y=3 \end{cases}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) Vô số nghiệm.

**7.** Hệ phương trình sau có bao nhiêu nghiệm: $\begin{cases} 2x-y=1 \\ 4x-2y=5 \end{cases}$

a) 0 b) 1 c) 2 d) Vô số nghiệm.

**8.** Xác định các hệ số a, b của hàm số $y=ax+b$ biết đồ thị của nó đi qua hai điểm: A(1 ; 5), B(–1 ; 1).

a) a = 2 ; b = 3 b) a = –2 ; b = –3

c) a = 3 ; b = 2 d) a = –3 ; b = –2.

**9.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+2y+2z=\dfrac{1}{2} \\ 2x+3y+5z=-2 \\ -4x-7y+z=-4 \end{cases}$. Đáp số là:

a) $\left(\frac{1}{2};-\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ b) $\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$

c) $\left(-\frac{1}{2};\frac{5}{2};\frac{7}{2}\right)$ d) $\left(-\frac{1}{2};-\frac{5}{2};-\frac{7}{2}\right)$.



**10.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2x+y=4 \\ x+2z=1+2\sqrt{2} \\ y+z=2+\sqrt{2} \end{cases}$. Đáp số là:

a) $\left(1;2;2\sqrt{2}\right)$ b) $\left(2;0;\sqrt{2}\right)$

c) $\left(-1;6;\sqrt{2}\right)$ d) $\left(1;2;\sqrt{2}\right)$.

## ĐỀ 14: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

**1.** Giải phương trình: $x^2+2\left(1+\sqrt{2}\right)x-\left(3+2\sqrt{2}\right)=0$. Đáp số là:

a) 1 ; $3+2\sqrt{2}$ b) 1 ; $-3-2\sqrt{2}$

c) 1 ; $1+\sqrt{2}$ d) Một đáp số khác.

**2.** Giải phương trình: $\sqrt{3}x^2+\left(5+\sqrt{3}\right)x+5=0$. Đáp số là:

a) $\sqrt{3}$ ; 5 b) –1 ; $\dfrac{5}{\sqrt{3}}$

c) –1 ; $-\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ d) –1 ; $-\dfrac{\sqrt{3}}{5}$.

**3.** Cho phương trình: $x^2-2(m-1)x+m^2=0$. Với giá trị nào của m thì phương trình trên có hai nhgiệm phân biệt?

a) $m\geq\dfrac{1}{2}$ b) $m>\dfrac{1}{2}$

c) $m\leq\dfrac{1}{2}$ d) $m<\dfrac{1}{2}$.

**4.** Cho phương trình: $x^2-2(m+6)x+m^2=0$. Tìm m để phương trình có nghiệm kép và tìm nghiệm kép đó.

a) $m=-3; x_1=x_2=3$ b) m = –3 ; $x_1=x_2=-3$

c) m = 3 ; $x_1=x_2=3$ d) m = 3 ; $x_1=x_2=-3$.

**5.** Giả sử $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $2x^2-11x+13=0$. Hãy tính $S=x_1+x_2$ và $P=x_1.x_2$.

a) $S=\dfrac{11}{2}; P=-\dfrac{13}{2}$ b) $S=-\dfrac{11}{2}; P=-\dfrac{13}{2}$

c) $S=\dfrac{11}{2}; P=\dfrac{13}{2}$ d) $S=-\dfrac{11}{2}; P=\dfrac{13}{2}$.

**6.** Giả sử $x_1, x_2$ là hai nghiệm của phương trình: $x^2+3x-10=0$. Hãy tính $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$.

a) $\frac{3}{10}$ b) $-\frac{3}{10}$ c) $\frac{10}{3}$ d) $-\frac{10}{3}$.

**7.** Lập phương trình bậc hai có hai nghiệm là $1-\sqrt{2}$ và $1+\sqrt{2}$.

a) $x^2-\sqrt{2}x+1=0$ b) $x^2+\sqrt{2}x-1=0$

c) $x^2-2x+1=0$ d) $x^2-2x-1=0$.

**8.** Giải phương trình: $x^4+6x^2+5=0$. Đáp số là:

a) $\pm 5$ b) $\pm\sqrt{5}$ c) $\pm 1; \pm\sqrt{5}$ d) Vô nghiệm.

**9.** Tìm m để phương trình sau có hai nghiệm phân biệt:

$(m-1)x^2+2mx+m=0$.

a) m > 0 b) $m \geq 0$

c) m > 0 và $m \neq 1$ d) $m \geq 0$ và $m \neq 1$.

**10.** Tìm m để phương trình sau vô nghiệm:

$mx^2+2(m-3)x+m-5=0$.

a) m > 9 b) $m \geq 9$

c) m < 9 d) m < 9 và $m \neq 0$.

## ĐỀ 15: PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI - HỆ PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI VỚI HAI ẨN

**1.** Cho phương trình: $(m-1)x^2+(2-m)x=0$ (*). Tìm m để phương trình (*) có một nghiệm $x_1=2$ và khi đó tính nghiệm $x_2$.

a) m = 2 ; $x_2=0$ b) m = 0 ; $x_2=2$

c) m = 0 ; $x_2=0$ d) Một đáp số khác.

**2.** Phương trình: $x^4-2005x^2-2006=0$ có bao nhiêu nghiệm?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 4.

**3.** Phương trình: $15x^4-7x^2=0$ có mấy nghiệm âm?

a) 0 b) 1 c) 2 d) 3.

**4.** Phương trình: $mx^2-2(m-1)x-3m-2=0$ có hai nghiệm phân biệt $x_1, x_2$ thỏa mãn điều kiện $\frac{1}{x_1^2}+\frac{1}{x_2^2}=1$ khi:

a) m = 0 hoặc m = 2 b) m = 0 hoặc m = 16

c) m = 4 d) m = 16.



**5.** Cho phương trình bậc hai: $ax^2+bx+c=0$ có hai nghiệm $x_1, x_2$ khác 0. Phương trình bậc hai nhận $\frac{1}{x_1}$ và $\frac{1}{x_2}$ làm nghiệm là:

a) $cx^2+bx+a=0$ b) $bx^2+ax+c=0$

c) $cx^2+ax+b=0$ d) $ax^2+cx+b=0$.

**6.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y=10 \\ x^2+y^2=58 \end{cases}$. Đáp số là:

a) $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$

c) $\begin{cases} x=3 \\ y=7 \end{cases}$ ; $\begin{cases} x=7 \\ y=3 \end{cases}$ d) Một đáp số khác.

**7.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^2-3xy+y^2+2x+3y-6=0 \\ 2x-y=3 \end{cases}$. Đáp số là:

a) (2 ; 1) b) (1 ; 2)

c) (2 ; 1), (1 ; 2) d) Vô nghiệm.

**8.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x+y+xy=11 \\ x^2+y^2+3(x+y)=28 \end{cases}$. Đáp số là:

a) (3 ; 2), (2 ; 3) b) (–3 ; –7), (–7 ; –3).

c) (3 ; 2), (–3 ; –7) d) (3 ; 2), (2 ; 3), (–3 ; –7), (–7 ; –3).

**9.** Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x-y=9 \\ xy=90 \end{cases}$. Đáp số là:

a) (15 ; 6), (6 ; 15) b) (–6 ; –15), (–15 ; –6)

c) (15 ; 6), (–6 ; –15) d) (15 ; 6), (6 ; 15), (–6 ; –15), (–15 ; –6).

**10.** Giải hệ phương trình sau: $\begin{cases} x+y+xy=5 \\ x^2+y^2=5 \end{cases}$. Đáp số là:

a) (1 ; 2) b) (2 ; 1)

c) (1 ; 2), (2 ; 1) d) Vô nghiệm.

## ĐỀ 16: ÔN TẬP CHƯƠNG III

**1.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Điều kiện xác định của phương trình: $\dfrac{2x}{x-2}=x-1$ là ...

b) Điều kiện xác định của phương trình: $x+\sqrt{2-x}=4-\sqrt{x-3}$ là ...

c) Điều kiện xác định của phương trình: $2x-\sqrt{2-x}+\sqrt{x-1}=0$ là ...

d) Điều kiện xác định của phương trình: $\dfrac{1}{\sqrt{x+5}}=3x$ là ...

**2.** Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng với các mệnh đề:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Phương trình: 3x – 12 = 0 có nghiệm là x = 4 | | |
| b) Phương trình: $(2m+4)x+3=0$ vô nghiệm khi $m\neq -2$. | | |
| c) Phương trình: $(m^2-3m+2)x+m-1=0$ có tập nghiệm là R khi m = 1. | | |
| d) Phương trình: $(m^2-9)x=m(m-3)$ vô nghiệm khi m = –3. | | |

**3.** Điền số thích hợp vào ô vuông:

a) Phương trình: $2x+\square=0$ có nghiệm là x = - 3.

b) Phương trình: $-3x+\square=0$ có nghiệm là $x=\dfrac{1}{3}$.

c) Phương trình: $\square x+2\sqrt{2}=0$ có nghiệm là x = –2.

d) Phương trình: $\square x-3=0$ có nghiệm là $x=\sqrt{3}$.

**4.** Lấy cột 2 đặt vào vị trí ...ở cột 1 để được một khẳng định đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Hệ phương trình: $\begin{cases}x-y=1\\x+y=3\end{cases}$ có nghiệm là... | A) x = 0 ; y = 5 |
| b) Hệ phương trình: $\begin{cases}3x+y=-9\\-x+3y=3\end{cases}$ có nghiệm là... | B) x = –1 ; y = 1 |
| c) Hệ phương trình: $\begin{cases}\sqrt{2}x+y=5\\x-y=-5\end{cases}$ có nghiệm là... | C) x = 2 ; y = 1 |
| d) Hệ phương trình: $\begin{cases}x+y=0\\3x+y=-2\end{cases}$ có nghiệm là... | D) x = –3 ; y = 0 |



**5.** Lấy cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một khẳng định đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Hệ phương trình: $\begin{cases}x+z=3\\x+y=1\\y+z=2\end{cases}$ có nghiệm là... | x = 0 ; y = 1 ; z = 2 |
| b) Hệ phương trình: $\begin{cases}x+y+z=3\\y+z=3\\3z=6\end{cases}$ có nghiệm là... | x = 1 ; y = 0 ; z = 2 |
| c) Hệ phương trình: $\begin{cases}5x=5\\x+y=2\\x+y+2z=4\end{cases}$ có nghiệm là... | x = –2 ; y = 0 ; z = –1 |
| d) Hệ phương trình: $\begin{cases}3x+y+z=-7\\y+z=-1\\x+y=-2\end{cases}$ có nghiệm là... | x = 1 ; y = 1 ; z = 1 |

**6.** Đánh dấu x vào ô đúng, sai tương ứng với các mệnh đề:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Phương trình: $x^2+5x+7=0$ vô nghiệm. | | |
| b) Phương trình: $2x^2-\sqrt{3}x-\sqrt{5}=0$ có hai nghiệm phân biệt. | | |
| c) Phương trình: $x^2+2x-m=0$ có hai nghiệm phân biệt khi m > –1. | | |
| d) Phương trình: $mx^2+2mx+(m+1)\neq 0$ vô nghiệm khi $m\geq 0$. | | |

**7.** Điền vào chỗ trống (...) (với $x_1, x_2$ là hai nghiệm của các phương trình tương ứng).

a) Phương trình: $x^2+2x-5=0$ có: $x_1+x_2=...; x_1.x_2=....$

b) Phương trình: $x^2-10x-1=0$ có: $x_1+x_2=...; x_1.x_2=...$

c) Phương trình: $3x^2+x-2=0$ có: $x_1+x_2=...; x_1.x_2=...$

d) Phương trình: $3x^2-mx-1=0$ có: $x_1+x_2=...; x_1.x_2=...$

**8.** Điền số thích hợp vào ô trống:

a) Phương trình: $x^4 + x^2 + 1 = 0$ có ☐ nghiệm.

b) Phương trình: $3x^4 + x^2 = 0$ có ☐ nghiệm.

c) Phương trình: $x^4 - 6x^2 - 7 = 0$ có ☐ nghiệm.

d) Phương trình: $x^4 - 6x^2 + 5 = 0$ có ☐ nghiệm.

**9.** Điền vào chỗ trống (...).

a) Hai số có tổng bằng 6, tích bằng 5 là ... và ...

b) Hai số có tổng bằng –2, tích bằng –3 là ... và ...

c) Hai số có tổng bằng 9, tích bằng –14 là ... và ...

d) Hai số có tổng bằng 18, tích bằng 77 là ... và ...

**10.** Lấy cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một khẳng định đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Hệ phương trình: $\begin{cases} x - y = 0 \\ x^2 + xy - y^2 = 1 \end{cases}$ có nghiệm là... | A) (6 ; 9), (9 ; 6) |
| b) Hệ phương trình: $\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ x^2 - xy = 24 \end{cases}$ có nghiệm là... | B) $\left(-9; -\frac{19}{3}\right); (8; 5)$. |
| c) Hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + xy + y^2 = 7 \\ x + xy + y = 5 \end{cases}$ có nghiệm là... | C) (–1 ; –1),(1 ; 1). |
| d) Hệ phương trình: $\begin{cases} x^2 + y^2 - x - y = 102 \\ xy + x + y = 69 \end{cases}$ có nghiệm là... | D) (1 ; 2), (2 ; 1). |

*
**



# ĐÁP ÁN

| Đề \ Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | d | c | b | c | c | b | d | c | b | a |
| 12 | d | d | b | b | a | c | d | b | c | d |
| 13 | c | b | d | c | d | d | a | a | b | d |
| 14 | b | c | d | a | c | a | d | d | c | a |
| 15 | c | c | b | d | a | c | a | d | c | c |

**ĐỀ 16**

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $x \neq 2$ | Đ | 6 | C | B | Đ | –2 ; –5 | 0 | 1 ; 5 | C |
| b | $x \in \varnothing$ | S | 1 | D | A | Đ | 10 ; –1 | 1 | –3 ; 1 | B |
| c | $1 \leq x \leq 2$ | Đ | $\sqrt{2}$ | A | D | Đ | $-\frac{1}{3}; -\frac{2}{3}$ | 2 | 2 ; 7 | D |
| d | $x > -5$ | Đ | $\sqrt{3}$ | B | C | Đ | $\frac{m}{3}; -\frac{1}{3}$ | 4 | 7 ; 11 | A |

*CHƯƠNG IV*

# BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH

## §1. BẤT ĐẲNG THỨC

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Khái niệm bất đẳng thức**

• ***Định nghĩa 1***

Cho hai số a và b, ta nói rằng a *nhỏ hơn* b, kí hiệu là $a < b$, nếu $a - b$ là số âm.

Từ đó, ta có:

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow a - b < 0}$$

Khi a nhỏ hơn b, ta cũng nói rằng b *lớn hơn* a và viết $b > a$. Vì $a - b$ là số âm khi và chỉ khi $b - a$ là số dương nên ta có:

$$\boxed{b > a \Leftrightarrow b - a > 0}$$

**II. Các tính chất cơ bản của bất đẳng thức**

1. ***Tính chất 1:*** *(Tính chất bắc cầu)*

$$\boxed{\begin{cases} a < b \\ b < c \end{cases} \Rightarrow a < c}$$

2. ***Tính chất 2:*** *(Quy tắc cộng bất đẳng thức với một số)*

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow a + c < b + c}$$

* ***Hệ quả:*** *(Quy tắc chuyển vế)*

$$\boxed{a < b + c \Leftrightarrow a - c < b}$$

3. ***Tính chất 3:*** *(Quy tắc cộng hai bất đẳng thức)*

$$\boxed{\begin{cases} a < b \\ c < d \end{cases} \Rightarrow a + c < b + d}$$

* ***Chú ý:*** Không có quy tắc trừ hai bất đẳng thức cùng chiều.

4. ***Tính chất 4:*** *(Quy tắc nhân bất đẳng thức với một số)*

$$\boxed{\begin{array}{l} a < b \Leftrightarrow ac < bc \quad \text{nếu} \quad c > 0 \\ a < b \Leftrightarrow ac > bc \quad \text{nếu} \quad c < 0 \end{array}}$$



5. ***Tính chất 5:*** *(Quy tắc nhân hai bất đẳng thức)*

$$\boxed{\begin{cases} 0 < a < b \\ 0 < c < d \end{cases} \Rightarrow ac < bd}$$

* ***Chú ý:*** Không có quy tắc chia hai bất đẳng thức.

6. ***Tính chất 6:*** *(Quy tắc lũy thừa bất đẳng thức)*

Với a, b > 0: n nguyên dương ta có

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow a^n < b^n}$$

* ***Hệ quả:*** Với a, b > 0: n nguyên lớn hơn 1, ta có

$$\boxed{a < b \Leftrightarrow \sqrt[n]{a} < \sqrt[n]{b}}$$

**III. Mở rộng khái niệm bất đẳng thức**

• ***Định nghĩa 2***

Ta nói a *nhỏ hơn hoặc bằng* b nếu $a < b$ hoặc $a = b$ và kí hiệu là $a \le b$. Vậy:

$$\boxed{a \le b \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a < b \\ a = b \end{array}\right.}$$

Nếu $a \le b$ thì ta cũng viết là $b \ge a$ (đọc là b *lớn hơn hoặc bằng* a).

Các mệnh đề dạng "$a < b$" hoặc "$b > a$" được gọi là các *bất đẳng thức ngặt*.

Các mệnh đề dạng "$a \le b$" hoặc "$b \ge a$" được gọi là các *bất đẳng thức không ngặt*. Có thể chứng minh được rằng các bất đẳng thức không ngặt có tất cả các tính chất của bất đẳng thức ngặt.

**IV. Chứng minh bất đẳng thức**

Là một dạng mệnh đề, một bất đẳng thức có thể đúng hoặc sai. Thay cho cách viết đầy đủ "chứng minh một bất đẳng thức là bất đẳng thức đúng" người ta thường viết ngắn gọn là "chứng minh bất đẳng thức".

❖ ***Phương pháp chứng minh một bất đẳng thức***

Để chứng minh bất đẳng thức a > b, ta có thể:

1. Chứng minh hiệu số $a - b > 0$.
2. Dùng phép biến đổi tương đương: $a > b \Leftrightarrow \ldots \Leftrightarrow A > B$. Nếu A > B đúng thì a > b cũng đúng, nghĩa là ta đã chứng minh được bất đẳng thức: a > b.
3. Xuất phát từ một bất đẳng thức đúng để đi đến bất đẳng thức cần chứng minh.

❖ ***Ghi chú:*** Trong một số bài toán ta phải chia ra nhiều trường hợp và chứng minh trong tất cả các trường hợp bất đẳng thức đều đúng.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.1:** Chứng minh: $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab} > 0$ (vì a > b > 0) $\Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$.

**Đề 4.2:** Cho hai số dương a và b. Chứng minh: $a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)} \Leftrightarrow (a+b)^2 \le 2\left(a^2+b^2\right)$

$\Leftrightarrow a^2+2ab+b^2 \le 2a^2+2b^2$

$\Leftrightarrow a^2-2ab+b^2 \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy: $a+b \le \sqrt{2\left(a^2+b^2\right)}$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

**Đề 4.3:** a) $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$ với a, b, c $\in R$.

b) $a^2+b^2+ab \ge 0$ với mọi a, b $\in R$.

Khi nào đẳng thức xảy ra?

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2 \ge 2ab+2bc+2ca$

$\Leftrightarrow \left(a^2-2ab+b^2\right)+\left(b^2-2bc+c^2\right)+\left(c^2-2ca+a^2\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ (đúng)

Vậy: $a^2+b^2+c^2 \ge ab+bc+ca$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

b) Ta có: $a^2+b^2+ab = a^2+2a.\frac{b}{2}+\frac{b^2}{4}+\frac{3b^2}{4} = \left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3b^2}{4} \ge 0,\ \forall a,b \in R$

Vậy: $a^2+b^2+ab \ge 0, \forall a,b \in R$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = 0$.



**Đề 4.4:** Chứng minh:

a) $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$ với mọi $a,b \in R$.

b) $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$ với mọi $a,b,c \in R$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3 \Leftrightarrow \left(a^4-a^3b\right)+\left(b^4-ab^3\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow a^3(a-b)-b^3(a-b) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)\left(a^3-b^3\right) \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2\left(a^2+ab+b^2\right) \ge 0$ (luôn đúng vì $(a-b)^2 \ge 0$ và $a^2+ab+b^2 \ge 0$)

Vậy: $a^4+b^4 \ge a^3b+ab^3$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b$.

b) Ta có: $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

$\Leftrightarrow 3a^2+3b^2+3c^2-a^2-b^2-c^2-2bc-2ab-2ac \ge 0$

$\Leftrightarrow 2a^2+2b^2+2c^2-2ab-2bc-2ca \ge 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2 \ge 0$ (luôn đúng)

Vậy $(a+b+c)^2 \le 3\left(a^2+b^2+c^2\right)$

Dấu bằng xảy ra $\Leftrightarrow a = b = c$.

**Đề 4.5:** Chứng minh các bất đẳng thức:

a) $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$ b) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2}{2}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $xy - \frac{x^2+y^2}{2} = \frac{-(x-y)^2}{2} \le 0$.

Vậy: $xy \le \frac{x^2+y^2}{2}$.

b) $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 - \frac{x^2+y^2}{2} \le 0 \Leftrightarrow \frac{-(x-y)^2}{4} \le 0$ (đúng).

Vậy: $\left(\frac{x+y}{2}\right)^2 \le \frac{x^2+y^2}{2}$.

**Đề 4.6:** Cho a < b. Chứng minh rằng với mọi n nguyên dương lẻ luôn có $a^n < b^n$.

***Hướng dẫn giải***

Có ba khả năng:

a) a và b trái dấu: Khi đó

$a < b \Rightarrow a < 0 < b \Rightarrow a^n < 0 < b^n$ (do n lẻ) $\Rightarrow a^n < b^n$.

b) a và b không âm: Suy trực tiếp từ tính chất 6.

c) a và b cùng âm: Khi đó

$a < b \Rightarrow a < b < 0 \Rightarrow 0 < -b < -a \Rightarrow (-b)^n < (-a)^n$ *(tính chất 6)*

$\Rightarrow -b^n < -a^n$ (vì n lẻ) $\Rightarrow a^n < b^n$.

Tóm lại: Với a < b và n nguyên, dương lẻ ta luôn có $a^n < b^n$.

**Đề 4.7:** Chứng minh bất đẳng thức sau: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$ với mọi số thực a, b.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b \Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 \geq 2ab + 2a + 2b$

$\Leftrightarrow 2a^2 + 2b^2 + 2 - 2ab - 2a - 2b \geq 0$

$\Leftrightarrow (a^2 + b^2 - 2ab) + (a^2 + 1 - 2a) + (b^2 + 1 - 2b) \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-b)^2 + (a-1)^2 + (b-1)^2 \geq 0$ (đúng)

Vậy: $a^2 + b^2 + 1 \geq ab + a + b$.

**Đề 4.8:** Chứng minh rằng với mọi a, b, c, d, e. Ta có:

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e).$$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - a(b + c + d + e) \geq 0$

$\Leftrightarrow a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 - ab - ac - ad - ae \geq 0$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a^2}{4} + b^2 - ab\right) + \left(\frac{a^2}{4} + c^2 - ac\right) + \left(\frac{a^2}{4} + d^2 - ad\right) + \left(\frac{a^2}{4} + e^2 - ae\right) \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - c\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - d\right)^2 + \left(\frac{a}{2} - e\right)^2 \geq 0 \text{ (đúng)}$$

Vậy: $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 \geq a(b + c + d + e)$.



**Đề 4.9:** Cho $a + b \geq 1$. Chứng minh $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a^2 + b^2 + 2ab = (a+b)^2 \geq 1$ (1)

và: $a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geq 0$ (2)

Cộng (1) và (2) ta có: $2a^2 + 2b^2 \geq 1 \Rightarrow a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$

Vậy: $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2}$.

**Đề 4.10:** Cho $a + b \geq 2$. Chứng minh rằng: $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a^4 + b^4 \geq a^3 + b^3$

$\Leftrightarrow a^4 - a^3 + b^4 - b^3 \geq 0$

$\Leftrightarrow a^3(a-1) + b^3(b-1) - (a-1) - (b-1) + a + b - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)(a^3 - 1) + (b-1)(b^3 - 1) + a + b - 2 \geq 0$

$\Leftrightarrow (a-1)^2(a^2 + a + 1) + (b-1)^2(b^2 + b + 1) + (a + b - 2) \geq 0$

Bất đẳng thức trên đúng vì:

* $(a-1)^2 \geq 0, (b-1)^2 \geq 0$

* $a^2 + a + 1 = \left(a + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

* $b^2 + b + 1 = \left(b + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} > 0$

* $a + b - 2 \geq 0$ *(do: $a + b \geq 2$)*

Vậy: $a^3 + b^3 \leq a^4 + b^4$ đã được chứng minh.

**Đề 4.11:** Cho $a, b, c \in [0,1]$. Chứng minh rằng:

$$a^2 + b^2 + c^2 \leq 1 + a^2 b + b^2 c + c^2 a.$$

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a, b, c \in [0,1] \Rightarrow a^2, b^2, c^2 \in [0,1]$

$$\Rightarrow (a^2-1)(b^2-1)(c^2-1)\le 0$$
$$\Rightarrow a^2b^2c^2-a^2b^2-a^2c^2-b^2c^2-1+a^2+b^2+c^2\le 0$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2-a^2b^2c^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2$$
$$\Rightarrow a^2+b^2+c^2\le 1+a^2b+b^2c+c^2a.$$

*
* *

# §2. BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Bất đẳng thức Côsi

$$\boxed{\frac{a+b}{2}\ge \sqrt{ab}, \forall a,b\ge 0}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b. Bất đẳng thức trên được gọi là bất đẳng thức Côsi và có thể phát biểu như sau:

❖ *Trung bình cộng của hai số không âm lớn hơn hoặc bằng bình trung bình nhân của chúng.*

* ***Hệ quả 1:*** Nếu hai số dương có tổng không đổi thì tích của chúng lớn nhất khi hai số bằng nhau.

* ***Hệ quả 2:*** Nếu hai số dương có tích không đổi thì tổng của chúng nhỏ nhất khi hai số đó bằng nhau.

* ***Chú ý:*** Bất đẳng thức Côsi cho ba số không âm.

$$\frac{a+b+c}{3}\ge \sqrt[3]{abc}$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi a = b = c.

### II. Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối

**1. *Tính chất 1*** $\boxed{|a+b|\le |a|+|b|}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab\ge 0$.

**2. *Tính chất 2*** $\boxed{|a-b|\le |a|+|b|}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi $ab\le 0$.



**3. *Tính chất 3***

$$\boxed{\begin{array}{l}|x|\le a\Leftrightarrow -a\le x\le a\\ |x|\ge a\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}x\ge a\\ x\le -a\end{array}\right.\end{array}} \quad \forall a>0.$$

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.12:** Cho a, b, c > 0. Chứng minh:

a) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2$ b) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

***Hướng dẫn giải***

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm $\frac{a}{b}$ và $\frac{b}{a}$, ta có:

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{a}}\Rightarrow \frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge 2 \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \frac{a}{b}=\frac{b}{a}\Leftrightarrow a=b.$

b) Áp dụng BĐT Côsi cho ba số không âm, ta có:

- $a+b+c\ge 3\sqrt[3]{abc}$ (1)
- $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\ge 3\sqrt[3]{\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}$ (2)

Nhân (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9\sqrt[3]{abc.\frac{1}{a}.\frac{1}{b}.\frac{1}{c}}$$

$$\Rightarrow \quad (a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\ge 9 \text{ (đpcm).}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow \begin{cases}a=b=c\\ \frac{1}{a}=\frac{1}{b}=\frac{1}{c}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$

**Đề 4.13:** Cho a, b, c > 0. Chứng minh: $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\ge 8.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

***Hướng dẫn giải***

Áp dụng BĐT Côsi cho 2 số không âm, ta có:

❖ $1+\frac{a}{b}\geq 2\sqrt{1.\frac{a}{b}}$ (1)

❖ $1+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{1.\frac{b}{c}}$ (2)

❖ $1+\frac{c}{a}\geq 2\sqrt{1.\frac{c}{a}}$ (3)

Nhân (1), (2), (3) vế theo vế ta được:

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 8\sqrt{\frac{a}{b}.\frac{b}{c}.\frac{c}{a}}\Rightarrow\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 8 \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1=\frac{a}{b}\\1=\frac{b}{c}\\1=\frac{c}{a}\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c.$

**Đề 4.14:** Cho a > 0, b > 0. Chứng minh: $(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geq 8.$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

***Hướng dẫn giải***

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

❖ $a+b\geq 2\sqrt{ab}\Rightarrow(a+b)^2\geq 4ab$ (1)

❖ $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\geq 2\sqrt{\frac{1}{ab}}\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geq\frac{4}{ab}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế, ta được:

$$(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geq 4ab+\frac{4}{ab} \quad (3)$$

Lại áp dụng BĐT Côsi cho hai số: 4ab và $\frac{4}{ab}$

Ta có: $4ab+\frac{4}{ab}\geq 2\sqrt{4ab.\frac{4}{ab}}=8$ (4)



Từ (3) và (4) suy ra: $(a+b)^2+\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2\geq 8$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=1.$

**Đề 4.15:** Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Chứng minh:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

***Hướng dẫn giải***

❖ Ta có: $1+\frac{1}{a}=1+\frac{a+b+c}{a}=1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}$ (*)

Mặt khác áp dụng BĐT Côsi cho 4 số: 1, 1, $\frac{b}{a},\frac{c}{a}$.

Ta được: $1+1+\frac{b}{a}+\frac{c}{a}\geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$

Do đó từ (*) $\Rightarrow 1+\frac{1}{a}\geq 4\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}}$ (1)

❖ Tương tự: $1+\frac{1}{b}\geq 4\sqrt[4]{\frac{ca}{b^2}}$ (2)

$$1+\frac{1}{c}\geq 4\sqrt[4]{\frac{ab}{c^2}} \quad (3)$$

Nhân (1), (2), (3) vế theo vế ta được:

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64\sqrt[4]{\frac{bc}{a^2}.\frac{ca}{b^2}.\frac{ab}{c^2}}$$

$$\Rightarrow\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64 \text{ (đpcm)}$$

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}1=1=\frac{b}{a}=\frac{c}{a}\\1=1=\frac{c}{b}=\frac{a}{b}\\1=1=\frac{a}{c}=\frac{b}{c}\\a+b+c=1\end{cases}\Leftrightarrow a=b=c=\frac{1}{3}.$

**Đề 4.16:** Cho a, b, c > 0 và abc = 1. Chứng minh:

$$\left(\frac{1}{a}+b+c\right)\left(\frac{1}{b}+c+a\right)\left(\frac{1}{c}+a+b\right)\geq 27.$$

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

***Hướng dẫn giải***

Áp dụng BĐT Côsi ta có:

❖ $\frac{1}{a}+b+c\geq 3\sqrt[3]{\frac{bc}{a}}$ (1)

❖ $\frac{1}{b}+c+a\geq 3\sqrt[3]{\frac{ca}{b}}$ (2)

❖ $\frac{1}{c}+a+b\geq 3\sqrt[3]{\frac{ab}{c}}$ (3)

Nhân (1), (2), (3) bế theo vế ta được:

$$\left(\frac{1}{a}+b+c\right)\left(\frac{1}{b}+c+a\right)\left(\frac{1}{c}+a+b\right)\geq 27\sqrt[3]{\frac{bc}{a}.\frac{ca}{b}.\frac{ab}{c}}$$

$$\Rightarrow\left(\frac{1}{a}+b+c\right)\left(\frac{1}{b}+c+a\right)\left(\frac{1}{c}+a+b\right)\geq 27\sqrt[3]{abc}$$

Mặt khác theo giả thiết: abc = 1.

Vậy: $\left(\frac{1}{a}+b+c\right)\left(\frac{1}{b}+c+a\right)\left(\frac{1}{c}+a+b\right)\geq 27$ (đpcm)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow a=b=c=1$.

**Đề 4.17:** Cho a > b > 0. Chứng minh: $a+\frac{1}{(a-b)b}\geq 3$.

Dấu đẳng thức xảy ra khi nào?

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a+\frac{1}{(a-b)b}=(a-b)+b+\frac{1}{(a-b)b}\geq 3\sqrt[3]{(a-b).b.\frac{1}{(a-b).b}}$

(BĐT Côsi)

$\Rightarrow a+\frac{1}{(a-b).b}\geq 3$. (đpcm)

Dấu đẳng thức xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}a=2\\b=1\end{cases}$.



**Đề 4.18:** Cho a > 0, b >0. Chứng minh: $\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq\sqrt[4]{ab}$.

***Hướng dẫn giải***

a > 0, b > 0. Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương, ta có:

$$2\sqrt{\sqrt{a}\sqrt{b}}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}\Rightarrow 2\sqrt[4]{ab}\leq\sqrt{a}+\sqrt{b}$$

$$\Rightarrow 2\sqrt[4]{ab}\,\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)\frac{\sqrt[4]{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

$$\Rightarrow\frac{2\sqrt{ab}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\leq\sqrt[4]{ab}\ \text{(đpcm)}.$$

**Đề 2.19:** a) Cho $a\geq 1, b\geq 1$. Chứng minh: $a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$.

b) Cho ba số a, b, c đôi một khác nhau. Chứng minh:

$$\frac{(a+b)^2}{(a-b)^2}+\frac{(b+c)^2}{(b-c)^2}+\frac{(c+a)^2}{(c-a)^2}\geq 2.$$

***Hướng dẫn giải***

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số không âm, ta có:

$$\sqrt{b-1}=\sqrt{(b-1).1}\leq\frac{b-1+1}{2}=\frac{b}{2}\Rightarrow a\sqrt{b-1}\leq\frac{ab}{2}\quad(1)$$

Chứng minh tương tự cũng có: $b\sqrt{a-1}\leq\frac{ab}{2}$ (2)

Cộng (1) và (2) vế theo vế ta được:

$a\sqrt{b-1}+b\sqrt{a-1}\leq ab$ (đpcm)

b) Đặt: $\frac{a+b}{a-b}=x,\ \frac{b+c}{b-c}=y,\ \frac{c+a}{c-a}=z$

Khi đó:

- $(x+1)(y+1)(z+1)=\frac{2a}{a-b}.\frac{2b}{b-c}.\frac{2c}{c-a}$
$=\frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$
- $(x-1)(y-1)(z-1)=\frac{2b}{a-b}.\frac{2c}{b-c}.\frac{2a}{c-a}$
$=\frac{8abc}{(a-b)(b-c)(c-a)}$

Do đó: $(x+1)(y+1)(z+1)=(x-1)(y-1)(z-1)$

$\Leftrightarrow xyz+xy+xz+yz+x+y+z+1=xyz-xy-xz-yz+x+y+z-1$

$\Leftrightarrow xy+xz+yz=-1$ (1)

Mặt khác ta có:

$(x+y+z)^2\geq 0\Rightarrow x^2+y^2+z^2+2(xy+xz+yz)\geq 0$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow x^2+y^2+z^2-2\geq 0$

$\Rightarrow x^2+y^2+z^2\geq 2$

Vậy: $\dfrac{(a+b)^2}{(a-b)^2}+\dfrac{(b+c)^2}{(b-c)^2}+\dfrac{(c+a)^2}{(c-a)^2}\geq 2$ (đpcm).

**Đề 4.20:** Với a > 0, b > 0, c > 0. Chứng minh các bất đẳng thức sau:

a) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\geq 2b$.

b) $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq a+b+c$.

c) $\dfrac{a^3+b^3}{2ab}+\dfrac{b^3+c^3}{2bc}+\dfrac{c^3+a^3}{2ca}\geq a+b+c$.

***Hướng dẫn giải***

a) Áp dụng bất đẳng thức Côsi cho hai số dương ta có:

$$\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2\sqrt{\frac{ab}{c}.\frac{bc}{a}}\Rightarrow \frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}\geq 2b \text{ (đpcm)}$$

b) Ta có: $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}\geq 2b$ (1)

Chứng minh tương tự ; ta có:

$$\frac{ab}{c}+\frac{ca}{b}\geq 2a \quad (2)$$

$$\frac{bc}{a}+\frac{ca}{b}\geq 2c \quad (3)$$

(1)+(2)+(3): $\dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ab}{c}+\dfrac{ca}{b}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq 2b+2a+2c$

$\Rightarrow \dfrac{ab}{c}+\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ca}{b}\geq a+b+c$ (đpcm)

c) Ta có: $(a+b)(a-b)^2\geq 0\Rightarrow (a+b)\left[(a^2-ab+b^2)-ab\right]\geq 0$

$\Rightarrow a^3+b^3-ab(a+b)\geq 0$

$\Rightarrow a^3+b^3\geq ab(a+b)$



$\Rightarrow \dfrac{a^3+b^3}{2ab}\geq \dfrac{a+b}{2}$ (4)

Chứng minh tương tự ta cũng có:

$$\frac{b^3+c^3}{2bc}\geq\frac{b+c}{2} \quad (5)$$

$$\frac{c^3+a^3}{2ca}\geq\frac{c+a}{2} \quad (6)$$

(4)+(5)+(6): $\dfrac{a^3+b^3}{2ab}+\dfrac{b^3+c^3}{2bc}+\dfrac{c^3+a^3}{2ca}\geq\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{c+a}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{a^3+b^3}{2ab}+\dfrac{b^3+c^3}{2bc}+\dfrac{c^3+a^3}{2ca}\geq a+b+c$ (đpcm)

**Đề 4.21:** Cho $a\geq 0; b\geq 0$. Chứng minh: $3a^3+7b^3>9ab^2$.

***Hướng dẫn giải***

Áp dụng BĐT Côsi cho ba số không âm $3a^3;3b^3;4b^3$

Ta có: $3a^3+3b^3+4b^3\geq 3\sqrt[3]{3a^3.3b^3.4b^3}$

$\Rightarrow 3a^3+7b^3\geq 3ab^2.\sqrt[3]{3.3.4}$ (1)

Mặt khác: $\sqrt[3]{3.3.4}>\sqrt[3]{3.3.3}=3$ (2)

(1) và (2) $\Rightarrow 3a^3+7b^3>9ab^2$ (đpcm).

**Đề 4.22:** Xét hàm số: $y=\dfrac{x}{2}+\dfrac{2}{x-1}$ với x > 1.

Tìm giá trị nhỏ nhất (GTNN).

***Hướng dẫn giải***

Với x > 1 ta có: $\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{x-1}\geq 2\sqrt{\dfrac{x-1}{2}.\dfrac{2}{x-1}}=2$

nên $y=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x-1}{2}+\dfrac{2}{x-1}\geq\dfrac{1}{2}+2=\dfrac{5}{2}$

Đẳng thức $y=\dfrac{5}{2}$ xảy ra khi và chỉ khi $\begin{cases}\dfrac{x-1}{2}=\dfrac{2}{x-1}\\ x>1\end{cases}$

Giải ra ta được x = 3

Vậy GTNN = $\dfrac{5}{2}$ (đạt khi x = 3).

**Đề 4.23:** Tìm giá trị lớn nhất (GTLN) của hàm số: $y=(2x-1)(3-x)$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $y=\frac{1}{2}(2x-1)(6-2x)$

Với $x\notin\left[\frac{1}{2};3\right]$ thì y < 0

Với $x\in\left[\frac{1}{2};3\right]$ thì $2x-1\geq 0$ và $6-2x\geq 0$

Áp dụng bất đẳng thức Côsi ta được: $y\leq\frac{1}{2}\left(\frac{2x-1+6-2x}{2}\right)^2=\frac{25}{8}$

Đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi 2x – 1 = 6 – 2x hay $x=\frac{7}{4}\in\left[\frac{1}{2};3\right]$.

Vậy GTLN = $\frac{25}{8}$ (đạt khi $x=\frac{7}{4}$)

* *Nhận xét:* Vì hàm số $y=(2x-1)(3-x)$ là một hàm bậc hai với hệ số a < 0 nên nó đạt GTLN tại $x=-\frac{b}{2a}=\frac{7}{4}$ và GTLN = $\frac{25}{8}$.

**Đề 4.24:** Tìm giá trị nhỏ nhất của hàm số:

a) $f(x)=x+\frac{3}{x}$ với x > 0 b) $f(x)=x+\frac{1}{x-1}$ với x > 1.

***Hướng dẫn giải***

a) Hai số dương x và $\frac{3}{x}$ có tích $x.\frac{3}{x}=3$ không đổi nên $f(x)$ đặt giá trị nhỏ nhất khi $x=\frac{3}{x}\Leftrightarrow x=\sqrt{3}$. Khi đó f(x) có GTNN$=2\sqrt{3}$.

b) Ta có: $f(x)=x-1+\frac{1}{x-1}+1$. Với x > 1 hai số dương x – 1 và $\frac{1}{x-1}$ có tích bằng 1 không đổi nên $f(x)$ đạt giá trị nhỏ nhất khi $x-1=\frac{1}{x-1}\Leftrightarrow(x-1)^2=1\Leftrightarrow x=2$. Khi đó $f(x)$ có GTNN= 3.



**Đề 4.25:** Chứng minh rằng:

a) $|x|-|y|\leq|x-y|$ b) $|x|-|y|\leq|x+y|$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $|x|=|x-y+y|\leq|x-y|+|y|\Rightarrow|x|-|y|\leq|x-y|$.

b) Ta có: $|x|=|x+y-y|\leq|x+y|+|-y|\Rightarrow|x|-|-y|\leq|x+y|$.

Hay $|x|-|y|\leq|x+y|$.

**Đề 4.26:** Chứng minh rằng nếu $|a|>2|b|$ thì $|a|<2|a-b|$.

***Hướng dẫn giải***

Theo giả thiết: $|a|>2|b|$ nên: $\begin{cases}|a|>0\\ \frac{1}{2}>\left|\frac{b}{a}\right|\end{cases}$

Mặt khác áp dụng bất đẳng thức: $|x-y|\geq|x|-|y|$

Ta được: $2|a-b|=2|a|\left|1-\frac{b}{a}\right|\geq 2|a|\left(1-\left|\frac{b}{a}\right|\right)\geq 2|a|\left(1-\frac{1}{2}\right)=|a|$

Nghĩa là: $|a|<2|a-b|$ (đpcm).

**Đề 4.27:** Tìm GTNN của hàm số: $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-4x+4}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $y=\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2-4x+4}$

$\Leftrightarrow y=\sqrt{x^2}+\sqrt{(x-2)^2}$ (hàm số xác định với mọi x).

$\Leftrightarrow y=|x|+|x-2|$

$\Leftrightarrow y=|x|+|2-x|\geq x+(2-x)=2$

Dấu "=" xảy ra $\Leftrightarrow\begin{cases}x\geq 0\\ 2-x\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow 0\leq x\leq 2$

Vậy: GTNN y = 2. Đạt được khi: $0\leq x\leq 2$.

*
**

# §3. BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Đại cương về bất phương trình và hệ bất phương trình một ẩn

**1. *Bất phương trình:*** Cho $f(x)$ và $g(x)$ là hai biểu thức của x.

Ta gọi mệnh đề chứa biến dạng

$$f(x) < g(x) \quad (f(x) \le g(x)) \qquad (1)$$

hoặc $f(x) > g(x) \quad (f(x) \ge g(x))$ (2)

là bất phương trình một ẩn, x là *ẩn số*, $f(x)$ là vế trái, $g(x)$ là vế phải của bất phương trình.

❖ Cũng như đối với phương trình, *điều kiện có nghĩa* (gọi tắt là *điều kiện*) của bất phương trình là các điều kiện của ẩn số x để các biểu thức ở hai vế của bất phương trình có nghĩa.

Số $x_0$ sao cho $f(x_0) < g(x_0) \quad (f(x_0) \le g(x_0))$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình (1).

❖ *Giải một bất phương trình* là tìm tập nghiệm của nó.

Nếu tập nghiệm của một bất phương trình là tập rỗng, ta nói bất phương trình đó *vô nghiệm*.

**2. *Hệ bất phương trình***

❖ Hệ bất phương trình là một tập hợp những bất phương trình.

❖ Mỗi giá trị của x thỏa mãn tất cả các bất phương trình của hệ (nghiệm chung của các bất phương trình đó) được gọi là một nghiệm của hệ đã cho.

❖ Giải hệ bất phương trình là tìm tập nghiệm của hệ đó.

### II. Bất phương trình tương đương

Hai bất phương trình được gọi là *tương đương* khi chúng có tập nghiệm bằng nhau (có thể rỗng).

Cũng như đối với phương trình, ta sử dụng kí hiệu $\Leftrightarrow$ để chỉ sự tương đương của hai bất phương trình.

Khi giải một bất phương trình, ta thường biến đổi bất phương trình đã cho thành một bất phương trình tương đương đơn giản hơn. Các phép biến đổi như vậy được gọi là *biến đổi tương đương*.



**** Định lí***

*Nếu giữ nguyên điều kiện có nghĩa (kí hiệu là A) của một bất phương trình và thực hiện trên nó các phép biến đổi sau thì ta được một bất phương trình tương đương:*

*a) Biến đổi đồng nhất ở từng vế.*

*b) Cộng hay trừ vào hai vế của bất phương trình cùng một số hoặc cùng một biểu thức xác định với mọi x thỏa mãn điều kiện A.*

*c) Nhân hoặc chia hai vế của bất phương trình với cùng một số dương hoặc với cùng một biểu thức luôn dương với mọi x thỏa mãn điều kiện A.*

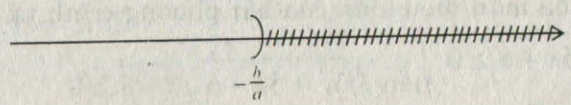
*d) Nhân hoặc chia hai vế của bất phương trình với cùng một số âm hoặc với cùng một biểu thức luôn âm với mọi x thỏa mãn điều kiện A và đổi chiều bất phương trình.*

### III. Bất phương trình, hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn. Bất phương trình có tham số

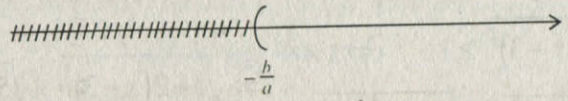
**3. *Bất phương trình bậc nhất một ẩn***

Bất phương trình dạng ax + b < 0 (hoặc $ax + b \le 0$, hoặc ax + b > 0, hoặc $ax + b \ge 0$) trong đó a và b là hai số đã cho, $a \ne 0$, được gọi là *bất phương trình bậc nhất một ẩn.*

❖ Nếu a > 0 thì lập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\infty; -\frac{b}{a}\right)$.




❖ Nếu a < 0 thì lập nghiệm của bất phương trình là $\left(-\frac{b}{a}; +\infty\right)$.




**4. *Hệ bất phương trình bậc nhất một ẩn***

Để giải một hệ các bất phương trình bậc nhất một ẩn, ta giải từng bất phương trình của hệ rồi lấy giao của các tập nghiệm.

**5. *Bất phương trình chứa tham số***

Cũng như phương trình, ta thường gặp các bất phương trình chứa tham số. Với một bất phương trình chứa tham số, tập nghiệm của nó phụ thuộc vào giá trị tham số . Vì vậy ta nói tìm tập nghiệm của một bất phương trình chứa tham số là *giải và biện luận* bất phương trình đó.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.28:** Tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của mỗi phương trình:

a) $\frac{1}{x} < 1 - \frac{1}{x+1}$

b) $\frac{1}{x^2-4} \le \frac{2x}{x^2-4x+3}$

c) $2|x| - 1 + \sqrt[3]{x-1} < \frac{2x}{x+1}$

d) $2\sqrt{1-x} > 3x + \frac{1}{x+4}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $x \in R \setminus \{-1;0\}$

b) $x \in R \setminus \{-2;1;2;3\}$

c) $x \in R \setminus \{-1\}$

d) $x \in (-\infty;1] \setminus \{-4\}$.

**Đề 4.29:** Hãy giải thích vì sao các bất phương trình sau vô nghiệm:

a) $\sqrt[4]{x^2+5x+6} + \sqrt{x+8} \le -3$.

b) $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < \frac{3}{2}$.

c) $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} > \sqrt{x^3-4x^2+5x-7}$.

***Hướng dẫn giải***

a) Với x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình ta có:

$\begin{cases} \sqrt[4]{x^2+5x+6} \ge 0 \\ \sqrt{x+8} \ge 0 \end{cases}$ nên $\sqrt[4]{x^2+5x+6}\sqrt{x+8} \ge 0$.

Do đó bất phương trình: $\sqrt[4]{x^2+5x+6} + \sqrt{x+8} \le -3$ vô nghiệm.

b) $\begin{cases} \sqrt{1+2(x-3)^2} \ge 1 \\ \sqrt{5-4x+x^2} = \sqrt{1+(2-x)^2} \ge 1 \end{cases} \Rightarrow \sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} \ge 2$

Do đó bất phương trình: $\sqrt{1+2(x-3)^2} + \sqrt{5-4x+x^2} < \frac{3}{2}$ vô nghiệm.

c) Với x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình, ta có:

$1+x^2 < 7+x^2 \Rightarrow \sqrt{1+x^2} < \sqrt{7+x^2} \Rightarrow \sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} < 0$.

Mặt khác: $\sqrt{x^3-4x^2+5x-7} \ge 0$

Do đó bất phương trình: $\sqrt{1+x^2} - \sqrt{7+x^2} > \sqrt{x^3-4x^2+5x-7}$ vô nghiệm.



**Đề 4.30:** Các cặp bất phương trình sau tương đương, tạo sao?

a) $-4x + 1 > 0$ và $4x - 1 < 0$.

b) $2x^2 + 5 \le 2x - 1$ và $2x^2 - 2x + 6 \le 0$.

c) $x + 1 > 0$ và $x + 1 + \frac{1}{x^2+1} > \frac{1}{x^2+1}$.

d) $\sqrt{x-1} \ge x$ và $(2x+1).\sqrt{x-1} \ge x.(2x+1)$.

***Hướng dẫn giải***

Xem định lí về phép biến đổi tương đương.

a) Tương đương - thỏa tính chất d của định lí.

b) Tương đương - thỏa tính chất b của định lí.

c) Tương đương - thỏa tính chất b của định lí.

d) Điều kiện của bất phương trình $\sqrt{x-1} \ge x$ là $x \ge 1$.

Với điều kiện này thì $2x + 1 > 0$. Vậy hai bất phương trình: $\sqrt{x-1} \ge x$ và $(2x+1).\sqrt{x-1} \ge x.(2x+1)$ là tương đương.

(Thỏa tính chất d của định lí).

**Đề 4.31:** Trong các cặp bất phương trình sau, những cặp bất phương trình nào tương đương?

a) $2x - 1 + \frac{1}{x-3} < \frac{1}{x-3}$ và $2x - 1 < 0$.

b) $2x - 1 + \frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3}$ và $2x - 1 > 0$

c) $x^2.(x+2) < 0$ và $x + 2 < 0$.

d) $x^2.(x+2) > 0$ và $x + 2 > 0$.

***Hướng dẫn giải***

a) Tương đương vì có cùng tập nghiệm $\left(-\infty;\frac{1}{2}\right)$.

b) Không tương đương vì hai tập nghiệm khác nhau.

Bất phương trình: $2x-1+\frac{1}{x-3} > \frac{1}{x-3}$ có tập nghiệm $\left(\frac{1}{2};+\infty\right) \setminus \{3\}$.

Bất phương trình: $2x - 1 > 0$ có tập nghiệm $\left(\frac{1}{2};+\infty\right)$.

c) Tương đương.

d) Không tương đương.

**Đề 4.32:** Giải các bất phương trình:

a) $(x+1).\sqrt{x+4}.\sqrt{x+7} \le 0$ b) $(x+1).\sqrt{(x+4)(x+7)} \le 0$

c) $\sqrt{x^2.(x-3)} \le 0$ d) $|x|.\sqrt{x-3} \le 0$.

***Hướng dẫn giải***

a) $-4 \le x \le -1$ b). $x \le -7; -4 \le x \le -1$

c) x = 0 ; x = 3 d) x = 3.

**Đề 4.33:** Giải hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 6x+\dfrac{5}{7} < 4x+7 \\ \dfrac{8x+3}{2} < 2x+5 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 15x-2 > 2x+\dfrac{1}{3} \\ 2(x-4) < \dfrac{3x-14}{2} \end{cases}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $x < \dfrac{7}{4}$. b) $\dfrac{7}{39} < x < 2$.

**Đề 4.34:** Giải và biện luận bất phương trình: $(m-1)x+2m<0$.

***Hướng dẫn giải***

Biến đổi bất phương trình đã cho ta có:

$$(m-1)x+2m<0 \Leftrightarrow (m-1)x<-2m.$$

* Nếu m > 1 thì m – 1 > 0, bất phương trình có nghiệm là $x < \dfrac{-2m}{m-1}$.

* Nếu m < 1 thì m – 1 < 0, bất phương trình có nghiệm là $x > \dfrac{-2m}{m-1}$.

* Nếu m = 1 thì m – 1 = 0, bất phương trình trở thành 0x < –2 , bất phương trình vô nghiệm.

Vậy ta có kết luận:

* m > 1: Bất phương trình có nghiệm là $x < \dfrac{-2m}{m-1}$.

* m = 1: Bất phương trình vô nghiệm.

* m < 1: Bất phương trình có nghiệm là $x > \dfrac{-2m}{m-1}$.



**Đề 4.35:** Giải và biện luận theo tham số m các bất phương trình, hệ bất phương trình:

a) $mx+9<3x+m^2$ b) $x+4m^2 \le 2mx+1$

c) $\dfrac{x+1}{m+1}-m<x+\dfrac{x-1}{m+1}$ d) $\begin{cases} 1-mx<0 \\ (2-3m)x+m<0 \end{cases}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $mx+9<3x+m^2 \Leftrightarrow (m-3)x<m^2-9$

$\Leftrightarrow (m-3)x<(m-3)(m+3)$.

- Nếu m > 3 thì m – 3 > 0, bất phương trình có nghiệm là x < m + 3
- Nếu m < 3 thì m – 3 < 0 bất phương trình có nghiệm là: x > m + 3
- Nếu m = 3, bất phương trình trở thành: 0x < 0, bất phương trình vô nghiệm.

b) $m > \dfrac{1}{2}$, bất phương trình có nghiệm $x \ge 2m+1$.

- $m < \dfrac{1}{2}$, bất phương trình có nghiệm $x \le 2m+1$.
- $m = \dfrac{1}{2}$, bất phương trình có tập nghiệm S = R.

c) m = –1, bất phương trình vô nghiệm.

- $m \ne -1$: $\dfrac{x+1}{m+1}-m<x+\dfrac{x-1}{m+1} \Leftrightarrow \dfrac{x}{m+1}+\dfrac{1}{m+1}-m<x+\dfrac{x}{m+1}-\dfrac{1}{m+1}$

$$\Leftrightarrow x > \frac{2}{m+1}-m.$$

d) Ta có: $\begin{cases} 1-mx<0 \\ (2-3m)x+m<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} mx>1 \\ (3m-2)x>m \end{cases} \quad (I)$

- Với m < 0 thì 3m – 2 < 0

Do đó: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{1}{m} \\ x<\dfrac{m}{3m-2} \end{cases}$

Hơn nữa: $\dfrac{1}{m}-\dfrac{m}{3m-2}=\dfrac{3m-2-m^2}{m(3m-2)}=\dfrac{-(m-1)(m-2)}{m(3m-2)}<0$

Nên: $\dfrac{1}{m}<\dfrac{m}{3m-2}$

Vậy nghiệm của hệ là $x<\dfrac{1}{m}$.

❖ Với m = 0: $(I)$ trở thành $\begin{cases} 0x > 1 \\ -2x > 0 \end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

❖ Với $0 < m < \frac{2}{3}$ thì $\begin{cases} m > 0 \\ 3m - 2 < 0 \end{cases}$ nên $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{m} \\ x < \frac{m}{3m-2} \end{cases}$

Hơn nữa: $\frac{1}{m} - \frac{m}{3m-2} = \frac{-(m-1)(m-2)}{m(3m-2)} > 0$ nên $\frac{1}{m} > \frac{m}{3m-2}$

Vậy hệ vô nghiệm.

❖ Với $m = \frac{2}{3}$: $(I)$ trở thành $\begin{cases} \frac{2}{3}x > 1 \\ 0x > \frac{2}{3} \end{cases}$

Hệ vô nghiệm.

❖ Với $\frac{2}{3} < m < 1$ thì $\begin{cases} m > 0 \\ 3m - 2 > 0 \end{cases}$ nên $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{m} \\ x > \frac{m}{3m-2} \end{cases}$

Hơn nữa: $\frac{1}{m} - \frac{m}{3m-2} = \frac{-(m-1)(m-2)}{m(3m-2)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{m}{3m-2}$

Vậy nghiệm của hệ $x > \frac{m}{3m-2}$.

❖ Với m = 1: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x > 1 \end{cases} \Leftrightarrow x > 1$. Hệ có nghiệm x > 1

❖ Với 1 < m < 2 thì $\begin{cases} m > 0 \\ 3m - 2 > 0 \end{cases}$ nên $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{m} \\ x > \frac{m}{3m-2} \end{cases}$

Hơn nữa: $\frac{1}{m} - \frac{m}{3m-2} = \frac{-(m-1)(m-2)}{m(3m-2)} > 0$

nên $\frac{1}{m} > \frac{m}{3m-2}$.

Vậy nghiệm của hệ là $x > \frac{1}{m}$.

❖ Với m = 2: $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} 2x > 1 \\ 4x > 2 \end{cases} \Leftrightarrow x > \frac{1}{2}$

Nghiệm của hệ: $x > \frac{1}{2}$.

❖ Với m > 2 thì $\begin{cases} m > 0 \\ 3m - 2 > 0 \end{cases}$ nên $(I) \Leftrightarrow \begin{cases} x > \frac{1}{m} \\ x > \frac{m}{3m-2} \end{cases}$

Hơn nữa: $\frac{1}{m} - \frac{m}{3m-2} = \frac{-(m-1)(m-2)}{m(3m-2)} < 0 \Rightarrow \frac{1}{m} < \frac{m}{3m-2}$

Vậy nghiệm của hệ: $x > \frac{m}{3m-2}$.

*
**

# §4. DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Dấu của nhị thức bậc nhất**

*Nhị thức bậc nhất* là biểu thức dạng $f(x) = ax + b$ trong đó a, b là hai số đã cho, $a \neq 0$.

* ***Định lí:*** *(Về dấu của nhị thức bậc nhất)*

*Nhị thức* $f(x) = ax + b$ *cùng dấu với hệ số a khi* $x > -\frac{b}{a}$, *trái dấu với hệ số a khi* $x < -\frac{b}{a}$.

• *Bảng xét dấu* $f(x) = ax + b$ *:*

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x) = ax + b$ | trái dấu a | 0 | cùng dấu a |

**II. Xét dấu một tích, thương những nhị thức bậc nhất**

Giả sử $f(x)$ là một tích của những nhị thức bậc nhất. Áp dụng định lí về dấu của nhị thức bậc nhất có thể xét dấu từng nhân tử.

Ta lập bảng xét dấu chung cho tất cả các nhị thức bậc nhất trong $f(x)$ và suy ra được dấu của $f(x)$.

Trường hợp $f(x)$ là một thương, ta cũng làm tương tự.

## III. Áp dụng

***Ví dụ 1.*** Lập bảng xét dấu nhị thức $f(x) = ax + b$ và khử dấu giá trị tuyệt đối trong biểu thức $|f(x)|$.

***Giải***

Theo định nghĩa giá trị tuyệt đối $|A| = \begin{cases} A & \text{nếu } A \geq 0 \\ -A & \text{nếu } A < 0 \end{cases}$.

Xét dấu ax + b ta suy ra:

+ Nếu a > 0 thì $|ax+b| = \begin{cases} ax+b & \text{nếu } x \geq -\dfrac{b}{a} \\ -(ax+b) & \text{nếu } x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$

+ Nếu a < 0 thì $|ax+b| = \begin{cases} -(ax+b) & \text{nếu } x \geq -\dfrac{b}{a} \\ ax+b & \text{nếu } x < -\dfrac{b}{a} \end{cases}$

***Ví dụ 2.*** Giải bất phương trình $|-2x+1| - |x+3| < 2$ (1)

***Giải***

Ta có: $(1) \Leftrightarrow |-2x+1| - |x+3| - 2 < 0$

Khử dấu giá trị tuyệt đối trong biểu thức:

$f(x) = |-2x+1| - |x+3| - 2$.

Ta có:

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\|-2x+1\|$ | $(-2x+1)$ | | $(-2x+1)$ | 0 | $-(-2x+1)$ | | |
| $\|x+3\|$ | $-(x+3)$ | 0 | $(x+3)$ | | | $(x+3)$ | |
| $f(x)$ | - x + 2 | | -3x - 4 | | | x - 6 | |



Do đó:

$$(1) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x < -3 \\ -x + 2 < 0 \end{cases} \text{(vô nghiệm)} \\ \begin{cases} -3 \leq x \leq \dfrac{1}{2} \\ -3x - 4 < 0 \end{cases} \\ \begin{cases} \dfrac{1}{2} < x < +\infty \\ x - 6 < 0 \end{cases} \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -\dfrac{4}{3} < x \leq \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} < x < 6 \end{array}\right. \Leftrightarrow -\frac{4}{3} < x < 6$$

Nghiệm của (1) là $-\dfrac{4}{3} < x < 6$.

* Bằng cách khử dấu giá trị tuyệt đối như trong ví dụ 2, ta có thể dễ dàng giải các bất phương trình $|x| < a$ và $|x| > a$ với a > 0 đã cho.

Ta có: $\boxed{\begin{array}{l} |x| < a \Leftrightarrow -a < x < a \\ |x| > a \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x > a \\ x < -a \end{array}\right. \end{array}}$ (a > 0).

***Ví dụ 3.*** Giải bất phương trình $|2x-3| < 1$ (2)

***Giải***

Ta có: $(2) \Leftrightarrow -1 < 2x - 3 < 1 \Leftrightarrow 2 < 2x < 4 \Leftrightarrow 1 < x < 2$

Nghiệm của (2) là 1 < x < 2.

***Ví dụ 4.*** Giải bất phương trình: $|-3x+5| \geq 2$ (3)

***Giải***

Ta có: $(3) \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x + 5 \geq 2 \\ -3x + 5 \leq -2 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} -3x \geq -3 \\ -3x \leq -7 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x \leq 1 \\ x \geq \dfrac{7}{3} \end{array}\right.$

Nghiệm của (3) là $x \leq 1; x \geq \dfrac{7}{3}$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.36:** Xét dấu các biểu thức.

a) $f(x)=(2x-1)(x+3)$ b) $f(x)=(-3x-3)(x+2)(x+3)$

c) $f(x)=\dfrac{-4}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}$ d) $f(x)=4x^2-1$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$

Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

b) Ta có: $-3x-3=0\Leftrightarrow x=-1$

$x+2=0\Leftrightarrow x=-2$

$x+3=0\Leftrightarrow x=-3$

Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-3$ | | $-2$ | | $-1$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-3x-1$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $x+2$ | | $-$ | | $-$ | | $+$ | | $+$ | |
| $x+3$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |

c) Ta có: $f(x)=\dfrac{-4}{3x+1}-\dfrac{3}{2-x}=\dfrac{-4(2-x)-3(3x+1)}{(3x+1)(2-x)}$

$=\dfrac{-5x-11}{(3x+1)(2-x)}$

$-5x-11=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{11}{5}$

$3x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{3}$

$2-x=0\Leftrightarrow x=2$



Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-\dfrac{11}{5}$ | | $-\dfrac{1}{3}$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5x-11$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ | | $-$ | |
| $3x+1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $2-x$ | | $+$ | | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $-$ | | $+$ | |

d) Ta có: $f(x)=4x^2-1=(2x-1)(2x+1)$

$2x-1=0\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$

$2x+1=0\Leftrightarrow x=-\dfrac{1}{2}$

Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-\dfrac{1}{2}$ | | $\dfrac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-1$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $2x+1$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |

**Đề 4.37:** Giải các bất phương trình:

a) $\dfrac{3x-4}{x-2}>1$; b) $\dfrac{2x-5}{2-x}\geq -1$; c) $\dfrac{2}{x-1}\leq\dfrac{5}{2x-1}$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $\dfrac{3x-4}{x-2}>1\Leftrightarrow\dfrac{3x-4}{x-2}-1>0$

$\Leftrightarrow\dfrac{3x-4-x+2}{x-2}>0\Leftrightarrow\dfrac{2x-2}{x-2}>0$

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $1$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-2$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $x-2$ | | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $\dfrac{2x-2}{x-2}>0$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $+$ | |

Tập nghiệm của bất phương trình: $S=(-\infty;1)\cup(2;+\infty)$.

b) $\dfrac{2x-5}{2-x} \ge -1 \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{2-x}+1 \ge 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2x-5+2-x}{2-x} \ge 0 \Leftrightarrow \dfrac{x-3}{2-x} \ge 0.$

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | 2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 2x – 2 | | – | | – | 0 | + | |
| x – 2 | | + | 0 | – | | – | |
| $\dfrac{2x-2}{x-2} > 0$ | | – | | + | 0 | – | |

Tập nghiệm của bất phương trình: $S = (2;3]$.

c) $\dfrac{2}{x-1} \le \dfrac{5}{2x-1} \Leftrightarrow \dfrac{2}{x-1} - \dfrac{5}{2x-1} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{2(2x-1)-5(x-1)}{(x-1)(2x-1)} \le 0$

$\Leftrightarrow \dfrac{-x+3}{(x-1)(2x-1)} \le 0$

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | 1 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| –x + 3 | | + | | + | | + | 0 | – | |
| x – 1 | | – | | – | 0 | + | | + | |
| 2x – 1 | | – | 0 | + | | + | | + | |
| VT ≤ 0 | | + | | – | | + | 0 | – | |

Tập nghiệm của bất phương trình: $S = \left(\dfrac{1}{2};1\right) \cup [3;+\infty)$.

**Đề 4.38:** Giải các bất phương trình:

a) $|2x-5| \le x+1$ b) $|2x+1| < x$

c) $|x-2| > x+1$ d) $|x+2| \ge x+1$.

***Hướng dẫn giải***

a) Bảng xét dấu 2x – 5:

| x | $-\infty$ | | $\frac{5}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x – 5 | | – | 0 | + | |



❖ Với $x \le \dfrac{5}{2}$ thì $|2x-5| = -2x+5$

Ta có bất phương trình:

$-2x+5 \le x+1 \Leftrightarrow -3x \le -4 \Leftrightarrow x \ge \dfrac{4}{3}$

Kết hợp điều kiện đang xét ta có: $\dfrac{4}{3} \le x \le \dfrac{5}{2}$ (1)

❖ Với $x > \dfrac{5}{2}$ thì $|2x-5| = 2x-5$

Ta có bất phương trình: $2x-5 \le x+1 \Leftrightarrow x \le 6$

Kết hợp điều kiện đang xét ta có: $\dfrac{5}{2} < x \le 6$ (2)

Từ (1) và (2) ta được tập nghiệm: $S = \left[\dfrac{4}{3};6\right]$.

b) Xét dấu 2x + 1:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{1}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 2x + 1 | | – | 0 | + | |

❖ Với $x \le -\dfrac{1}{2}$ ta có bất phương trình:

$-(2x+1) < x \Leftrightarrow x > -\dfrac{1}{3}$ (loại)

❖ Với $x > -\dfrac{1}{2}$ Ta có bất phương trình:

$2x+1 < x \Leftrightarrow x < -1$ (loại)

Vậy bất phương trình vô nghiệm.

c) Xét dấu x – 2:

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x – 2 | | – | 0 | + | |

❖ Với $x \le 2$ ta có bất phương trình: $-x+2 > x+1 \Leftrightarrow x < \dfrac{1}{2}$.

❖ Với x > 2 ta có bất phương trình: x – 2 > x + 1 (vô nghiệm).

Vậy tập nghiệm bất phương trình là: $S = \left(-\infty;\dfrac{1}{2}\right)$.

d) Xét dấu x + 2:

| x | $-\infty$ | | –2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| x + 2 | | – | 0 | + | |

❖ Với $x \le -2$ ta có bất phương trình:

$$-x-2 \ge x+1 \Leftrightarrow 2x \le -3 \Leftrightarrow x \le -\frac{3}{2}.$$

Kết hợp với điều kiện ta có: $x \le -2$ (3)

❖ Với x > −2 ta có bất phương trình:

$$x+2 \ge x+1 \Leftrightarrow 0x+2 \ge 1 \Leftrightarrow x \in R$$

Kết hợp với điều kiện ta có: x > −2 (4)

Từ (3) và (4) ta có tập nghiệm của bất phương trình là: S = R.

**Đề 4.39:** Giải các bất phương trình:

a) $|x|+|3-x|>4+|x+2|$ b) $|5x-4| \ge 6$

c) $\big||x-1|-5\big| \le 2$ d) $\left|\frac{-5}{x+2}\right| < \left|\frac{10}{x-1}\right|$.

***Hướng dẫn giải***

a) $S=(-\infty;-1)\cup(11;+\infty)$ b) $S=\left(-\infty;-\frac{2}{5}\right]\cup[2;+\infty)$

c) $S=[-6;-2]\cup[4;8]$ d) $S=(-\infty;-5)\cup(-1;1)\cup(1;+\infty)$.

**Đề 4.40:** Giải và biện luận các phương trình sau theo tham số m:

a) $|2x-1|=x+m$ (1) b) $|x-1|=x+m$ (2)

***Hướng dẫn giải***

a) * Với $x \ge \frac{1}{2}$ ta có (1) $\Leftrightarrow 2x+1=x+m \Leftrightarrow x=m+1$

Nghiệm này nhận được nếu $m+1 \ge \frac{1}{2} \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$

* Với $x \le \frac{1}{2}$ ta có (1) $\Leftrightarrow -2x+1=x+m \Leftrightarrow x=\frac{1-m}{3}$

Nghiệm này nhận được nếu $\frac{1-m}{3} \le \frac{1}{2} \Leftrightarrow 2-2m \le 3 \Leftrightarrow m \ge -\frac{1}{2}$

Vậy: $m \ge -\frac{1}{2}$ (1) có tập nghiệm $S=\left\{m+1;\frac{1-m}{3}\right\}$; $m<-\frac{1}{2}: S=\varnothing$.

b) * Với $x \ge 1$ ta có (2) $\Leftrightarrow x-1=x+m \Leftrightarrow m=-1$

* Với x < 1 ta có (2) $\Leftrightarrow 1-x=x+m \Leftrightarrow x=\frac{1-m}{2}$

Nghiệm này nhận được nếu $\frac{1-m}{2}<1 \Leftrightarrow m>-1$

Vậy: $m<-1: S=\varnothing; m=-1: S=[1;+\infty); m>-1: S=\left\{\frac{1-m}{2}\right\}$.



**Đề 4.41:** Tìm m để hệ bất phương trình: $\begin{cases}|x-1| \le m\\ |x+m| \le 2\end{cases}$.

a) Có nghiệm duy nhất ; b) Vô nghiệm.

***Hướng dẫn giải***

Xét hệ: $(I)\begin{cases}|x-1| \le m & (1)\\ |x+m| \le 2 & (2)\end{cases}$

❖ Với m < 0: Rõ ràng hệ vô nghiệm

❖ Với m = 0: $(I)\begin{cases}|x-1| \le 0\\ |x| \le 2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x=1\\ -2 \le x \le 2\end{cases} \Leftrightarrow x=1$

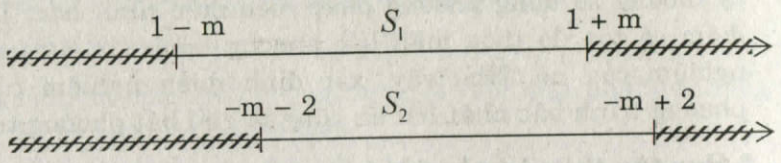
Hệ có nghiệmduy nhất.

❖ Với m > 0: $(1) \Leftrightarrow -m \le x-1 \le m \Leftrightarrow 1-m \le x \le 1+m$

(1) có tập nghiệm: $S_1=[1-m;1+m]$

(2) $\Leftrightarrow -2 \le x+m \le 2 \Leftrightarrow -m-2 \le x \le -m+2$.

(2) có tập nghiệm: $S_2=[-m-2;-m+2]$




Hệ (1) có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2=\{a\} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}1-m=-m+2\\ 1+m=-m-2\end{bmatrix}$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}1=2(VN)\\ m=-\frac{3}{2}(\text{loại vì } m>0)\end{bmatrix}.$$

Hệ (1) vô nghiệm $\Leftrightarrow S_1 \cap S_2=\varnothing$

$$\Leftrightarrow \begin{bmatrix}-m+2<1-m\\ 1+m<-m-2\end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{bmatrix}2<1(VN)\\ m<-\frac{3}{2}(\text{loại vì } m>0)\end{bmatrix}$$

Tóm lại: a) Hệ có nghiệm duy nhất $\Leftrightarrow m=0$.

b) Hệ vô nghiệm $\Leftrightarrow m<0$.

*
**

# §5. BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Định nghĩa bất phương trình bậc nhất hai ẩn

* ***Định nghĩa:*** *Bất phương trình bậc nhất hai ẩn* x, y là mệnh đề chứa hai biến dạng:

$$ax+by \le c \qquad (1)$$

$$(ax+by<c, ax+by \ge c, ax+by>c)$$

trong đó a, b, c là những số đã cho, a và b không đồng thời bằng 0, x và y là ẩn số.

Cặp số $(x_0;y_0)$ sao cho $ax_0+by_0 \le c$ được gọi là một *nghiệm* của bất phương trình (1).

*Giải bất phương trình* (1) là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của nó.

### II. Giải bất phương trình bậc nhất hai ẩn

Cũng như phương trình bậc nhất hai ẩn, các bất phương trình bậc nhất hai ẩn luôn có vô số nghiệm và để mô tả tập nghiệm của nó ta thường sử dụng phương pháp biểu diễn hình học. Tập hợp các điểm có tọa độ thỏa mãn bất phương trình (1) được gọi là miền nghiệm của nó. Như vậy, xác định miền nghiệm của một bất phương trình bậc nhất hai ẩn cũng là giải bất phương trình đó.

* ***Quy tắc thực hành giải bất phương trình:*** $ax+by \le c$

**Bước 1:** Vẽ đường thẳng ax + by = c (d)

**Bước 2:** Lấy một điểm $M_0(x_0;y_0) \notin (d)$.

**Bước 3:** Tính $ax_0+by_0$ và so sánh $ax_0+by_0$ với c.

- Nếu $ax_0+by_0<c$ thì nửa mặt phẳng bờ (d) chứa $M_0$ là miền nghiệm của (1).
- Nếu $ax_0+by_0>c$ thì nửa mặt phẳng bờ (d) không chứa $M_0$ là miền nghiệm của (1).

### III. Hệ bất phương trình bậc nhất hai ẩn

- Hệ bất phương trình hai ẩn là một tập hợp những bất phương trình hai ẩn x, y.
- Mỗi nghiệm chung của tất cả các bất phương trình trong hệ được gọi là một nghiệm của hệ bất phương trình.
- Giải hệ bất phương trình hai ẩn là tìm tập hợp tất cả các nghiệm của nó.



## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.42:** Xác định miền nghiệm của các bất phương trình hai ẩn x, y sau:

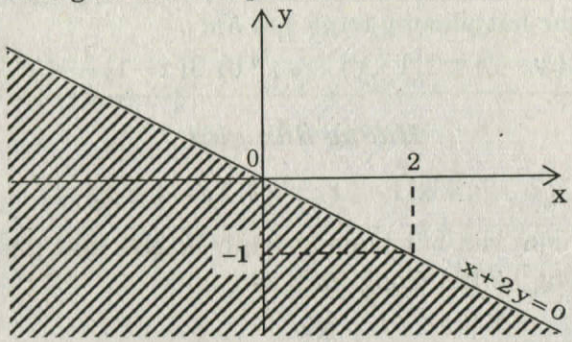
a) $2(x+y+1)>x+2$ b) $2(y+x) \le 3(x+1)+1$

c) $y+0.x>5$ d) $0.y+x \le 3$.

***Hướng dẫn giải***

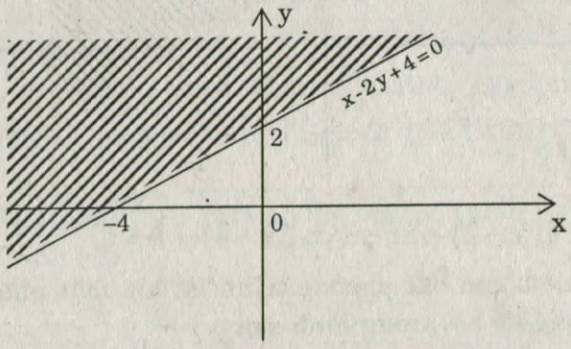
a) $2(x+y+1)>x+2 \Leftrightarrow x+2y>0$

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không bị gạch, không kể bờ) trong hình sau:

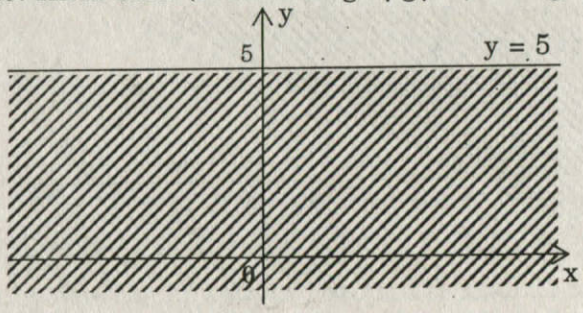



b) $2(y+x) \le 3(x+1)+1 \Leftrightarrow x-2y+4 \ge 0$

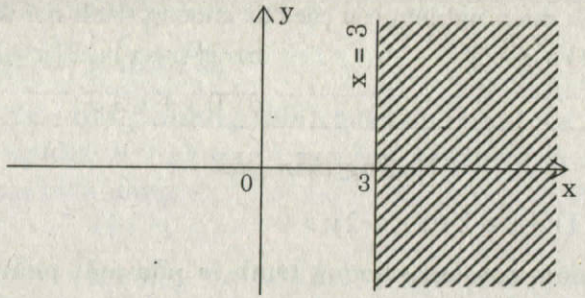
Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không bị gạch, kể cả bờ) trong hình sau:




c) Đáp số: Hình dưới. (Phần không bị gạch, không kể bờ).



d) Đáp số: Hình dưới. (Phần không bị gạch, kể cả bờ).



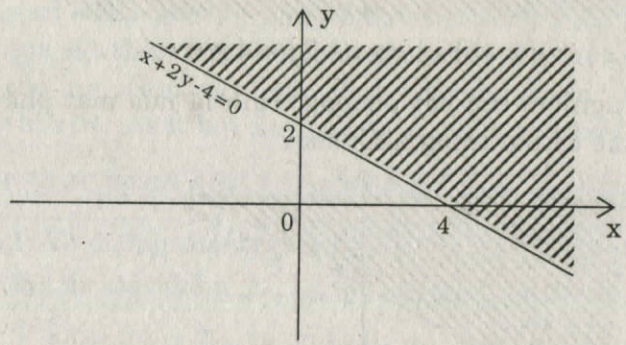

**Đề 4.43:** Giải các bất phương trình hai ẩn:

a) $-x+2+2(y-2)<2(1-x)$ b) $3(x-1)+4(y-2)<5x-3$.

***Hướng dẫn giải***

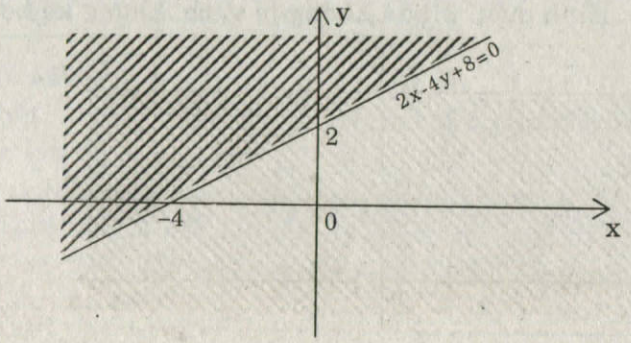
a) $-x+2+2(y-2)<2(1-x) \Leftrightarrow x+2y-4<0$.

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không bị gạch, không kể bờ) trong hình sau:




b) $3(x-1)+4(y-2)<5x-3 \Leftrightarrow 2x-4y+8>0$

Miền nghiệm của bất phương trình là nửa mặt phẳng (không bị gạch, không kể bờ) trong hình sau:






**Đề 4.44:** Giải (xác định miền nghiệm) hệ bất phương trình:

$$\begin{cases} 3x+y \le 6 \\ x+y \le 4 \\ x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$$

***Hướng dẫn giải***

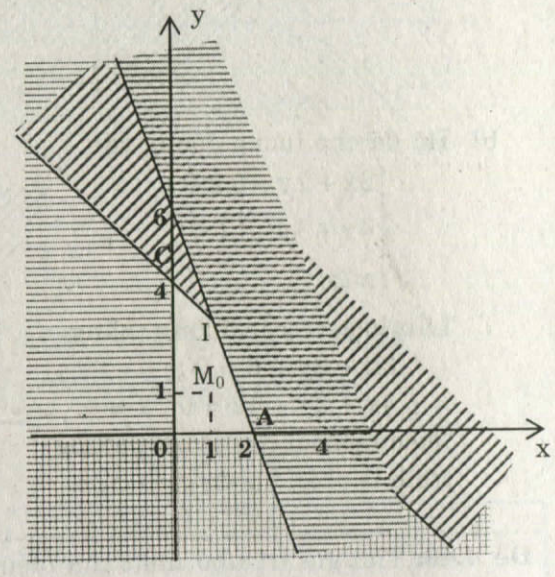
Vẽ các đường thẳng

$(d_1): 3x+y=6$.

$(d_2): x+y=4$

$(d_3): x=0$ (trục tung)

$(d_4): y=0$ (trục hoành)




Các đường thẳng này là bờ của các miền nghiệm của mỗi bất phương trình của hệ.

Vì điểm $M_0(1;1)$ có tọa độ thỏa mãn tất cả các bất phương trình trong hệ trên nên ta gạch bỏ các nửa mặt phẳng bờ $(d_1)$, $(d_2)$, $(d_3)$, $(d_4)$ không chứa điểm $M_0$. Miền nghiệm của hệ đã cho là miền không bị gạch kể cả bờ (hình tứ giác OCIA) (Xem hình).

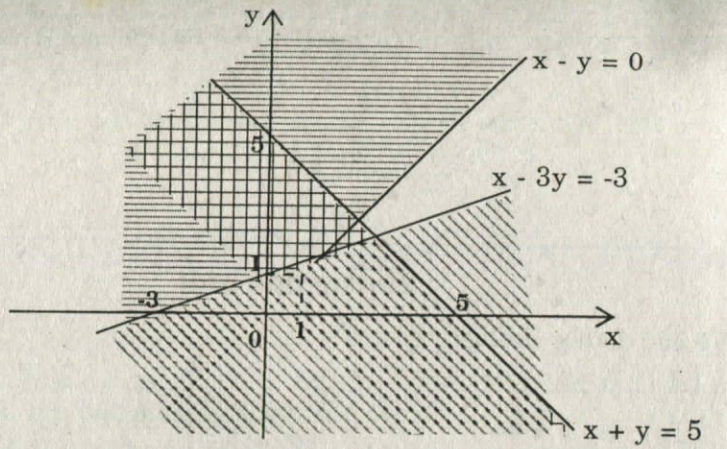
**Đề 4.45:** Biểu diễn trên mặt phẳng tọa độ miền nghiệm các hệ bất phương trình sau:

a) $\begin{cases} x-y>0 \\ x-3y<-3 \\ x+y>5 \end{cases}$

b) $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}-1 \ge 0 \\ 2(x-1)+\dfrac{3y}{2} \le 4 \\ x \ge 0 \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

a) Lần lượt vẽ các đường thẳng: x – y = 0 ; x – 3y = –3 ; x + y = 5.
Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không bị gạch chéo.




b) Hệ đã cho tương đương với:

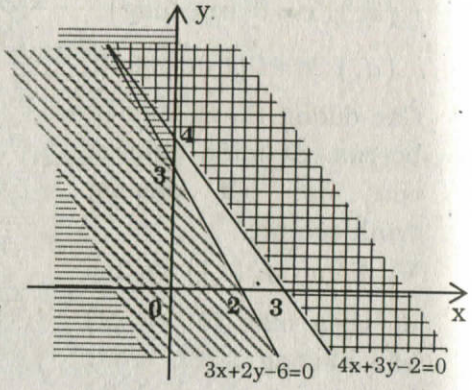
$$\begin{cases} 3x+2y-6\geq 0 \\ 4x+3y-12\leq 0 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

Lần lượt vẽ các đường thẳng:

$3x + 2y - 6 = 0$ ;

$4x + 3y - 12 = 0$ ; $x = 0$.

Miền nghiệm của hệ bất phương trình là phần không gạch chéo.




**Đề 4.46:** Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $F = y - x$, với x, y thay đổi nhưng luôn luôn thỏa mãn điều kiện:

$$\begin{cases} -2x+y+2\leq 0 \\ x-2y\leq 2 \\ x+y\leq 5 \\ x\geq 0 \end{cases}$$

***Hướng dẫn giải***

Lần lượt dựng các đường thẳng:

$$-2x+y+2=0; x-2y-2=0; x+y-5=0;\ x=0$$

và tìm tập nghiệm S của hệ bất phương trình.

Tập nghiệm S được biểu diễn bằng miền trong của tam giác ABC với $A\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$; $B\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right)$; $C(4;1)$

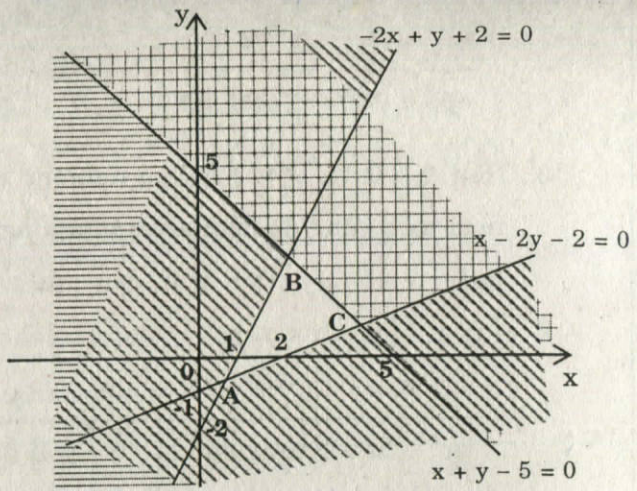
Tại $A\left(\frac{2}{3};-\frac{2}{3}\right)$ thì $F=\frac{-4}{3}$



Tại $B\left(\frac{7}{3};\frac{8}{3}\right)$ thì $F=\frac{1}{3}$

Tại C(4 ; 1) thì F = –3

Vậy F đạt giá trị nhỏ nhất tại C(4 ; 1) và Min F = –3.




* * *

# §6. DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Dấu của tam thức bậc hai

*Tam thức bậc hai* là biểu thức dạng:

$$f(x)=ax^2+bx+c$$

trong đó a, b, c là những số đã cho, $a\neq 0$.

* ***Định lí:*** *Cho tam thức bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c$ *có biệt thức*

$$\Delta=b^2-4ac.$$

1. Nếu $\Delta<0$ thì với mọi $x, f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a

| x | $-\infty$ | $+\infty$ |
|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | cùng dấu a | |

2. Nếu $\Delta=0$ thì $f(x)$ có nghiệm kép $x=-\frac{b}{2a}$; với mọi $x\neq-\frac{b}{2a}$, $f(x)$ luôn cùng dấu với hệ số a

| x | $-\infty$ | $-\frac{b}{2a}$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | cùng dấu a | 0 | cùng dấu a |

3. Nếu $\Delta > 0$ thì $f(x)$ có hai nghiệm $x_1$; $x_2$ $(x_1 < x_2)$ và $f(x)$ luôn luôn cùng dấu với a với mọi x ngoài đoạn $[x_1; x_2]$ $(x < x_1$ hoặc $x > x_2)$, $f(x)$ trái dấu với a khi x ở trong khoảng $(x_1; x_2)$ $(x_1 < x < x_2)$.

| x | $-\infty$ | $x_1$ | $x_2$ | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|
| $ax^2+bx+c$ | cùng dấu a | 0 | trái dấu a | 0 cùng dấu a |

## II. Bất phương trình bậc hai một ẩn

* ***Định nghĩa:*** *Bất phương trình bậc hai một ẩn* là bất phương trình dạng $ax^2+bx+c<0$ (hoặc $ax^2+bx+c\le 0$, hoặc $ax^2+bx+c>0$, hoặc $ax^2+bx+c\ge 0$) trong đó a, b, c là những số đã cho, $a\neq 0$; x là ẩn số.

* ***Cách giải bất phương trình bậc hai***

Giải bất phương trình bậc hai $ax^2+bx+c<0$ thực chất là tìm các khoảng mà trong đó $f(x)=ax^2+bx+c$ cùng dấu với hệ số a (trường hợp a < 0) hay trái dấu với a (trường hợp a > 0).

* ***Ghi chú***

• Cho tam giác: $f(x)=ax^2+bx+c(a\neq 0)$

1) $f(x)>0;\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.

2) $f(x)\ge 0;\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a>0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.

3) $f(x)<0;\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta<0 \end{cases}$.

4) $f(x)\le 0;\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\le 0 \end{cases}$.

5) $f(x)$ có hai nghiệm dương phân biệt $\Leftrightarrow \begin{cases} \Delta>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases}$.



## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.47:** Xét dấu các biểu thức:

a) $f(x)=3x^2-10x+3$ b) $f(x)=2x^2-9x+7$

c) $f(x)=-2x^2-5x+4$ d) $f(x)=-x^2+3x+10$.

***Hướng dẫn giải***

a) $f(x)=3x^2-10x+3$

$\Delta'=b'^2-ac=25-9=16>0$

Tam thức có hai nghiệm: $x_1=\frac{1}{3}$; $x_2=3$

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{3}$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

b) $f(x)=2x^2-9x+7$

$\Delta'=b^2-4ac=81-56=25>0$

Tam thức có hai nghiệm: $x_1=1$; $x_2=\frac{7}{2}$

| x | $-\infty$ | | 1 | | $\frac{7}{2}$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

* *Ghi chú:* Có thể nhận xét tam thức có dạng a + b + c = 0 nên có hai nghiệm $x_1=1$; $x_2=\frac{7}{2}$.

c) $f(x)=-2x^2-5x+4$

$\Delta=b^2-4ac=57>0$

Tam thức có hai nghiệm: $x_1=\frac{-5-\sqrt{57}}{2}$; $x_2=\frac{-5+\sqrt{57}}{2}$.

| x | $-\infty$ | | $x_1$ | | $x_2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

d) $f(x)=-x^2+3x+10$

$\Delta=b^2-4ac=49>0$

Tam thức có hai nghiệm: $x_1=-2$; $x_2=5$

| x | $-\infty$ | | $-2$ | | 5 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

**Đề 4.48:** Xét dấu các biểu thức:

a) $f(x)=x^2-4x+4$ b) $f(x)=-x^2+x-1$.

***Hướng dẫn giải***

a) $f(x)=x^2-4x+4$

$\Delta'=b_x'^2-ac=4-4=0$.

Tam thức có nghiệm kép $x_1=x_2=2$.

| x | $-\infty$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | + | |

b) $f(x)=-x^2+x-1$

$\Delta=b^2-4ac=1-4=-3<0$.

Tam thức vô nghiệm.

| x | $-\infty$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | |

**Đề 4.49:** Giải các bất phương trình:

a) $2x^2-5x+2<0$ b) $-5x^2+4x+12<0$

c) $16x^2+40x+25>0$ d) $-2x^2+3x-7>0$

e) $3x^2-4x+4\geq 0$ f) $x^2-x-6\leq 0$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có $2x^2-5x+2=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=\frac{1}{2}\\x=2\end{array}\right.$

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $\frac{1}{2}$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x^2-5x+2<0$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Tập nghiệm của bất phương trình là $S=\left(\frac{1}{2};2\right)$.

b) Ta có $-5x^2+4x+12=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=-\frac{6}{5}\\x=2\end{array}\right.$.



Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-\frac{6}{5}$ | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $-5x^2+4x+12<0$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

Tập nghiệm của bất phương trình $S=\left(-\infty;-\frac{6}{5}\right)\cup(2;+\infty)$.

c) Ta có $16x^2+40x+25=0\Leftrightarrow x=-\frac{5}{4}$ (nghiệm kép).

a = 16 > 0, $\Delta'=200-16.25=0\Rightarrow 16x^2+40x+25>0,\forall x\neq-\frac{5}{4}$.

Vậy $S=R\setminus\left\{-\frac{5}{4}\right\}$.

d) $a=-2<0;\Delta=9-56=-47<0\Rightarrow -2x^2+3x-7<0,\forall x\in R$.

Do đó: $S=\varnothing$.

e) a = 3 > 0, $\Delta'=4-12=-8<0\Rightarrow 3x^2-4x+4>0,\forall x\in R$.

Vậy S = R.

f) $x^2-x-6=0\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}x=3\\x=-2\end{array}\right.$.

Bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | −2 | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-x-6\leq 0$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

Tập nghiệm của bất phương trình $S=[-2;3]$.

**Đề 4.50:** Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{2x-x^2}$.

***Hướng dẫn giải***

Hàm số xác định $\Leftrightarrow 2x-x^2\geq 0$

Ta có: $2x-x^2=0\Leftrightarrow x=0;x=2$

| x | $-\infty$ | | 0 | | 2 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $2x-x^2\geq 0$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

Vậy tập xác định của hàm số là: $D=[0;2]$.

**Đề 4.51:** Giải bất phương trình: $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} < \dfrac{1}{x-3}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} < \dfrac{1}{x-3} \Leftrightarrow \dfrac{2x-5}{x^2-6x-7} - \dfrac{1}{x-3} < 0$

$$\Leftrightarrow \frac{(2x-5)(x-3)-(x^2-6x-7)}{(x^2-6x-7)(x-3)} < 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2-5x+22}{(x^2-6x-7)(x-3)} < 0 \qquad (*)$$

- $x^2-5x+22=0$ vô nghiệm.
- $x^2-6x-7=0 \Leftrightarrow x=-1 \vee x=7$.
- $x-3=0 \Leftrightarrow x=3$.

Ta có bảng xét dấu:

| x | $-\infty$ | | $-1$ | | $3$ | | $7$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $x^2-5x+22$ | + | | + | | + | | + | | |
| $x^2-6x-7$ | + | 0 | − | | − | 0 | + | | |
| $x-3$ | − | | − | 0 | + | | + | | |
| (*) | − | | + | | − | | + | | |

Vậy tập nghiệm của bất phương trình đã cho là:

$$T=(-\infty;-1)\cup(3;7).$$

**Đề 4.52:** Giải các hệ bất phương trình:

a) $\begin{cases} 2x^2+9x+7>0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} 2x^2+x-6>0 \\ 3x^2-10x+3>0 \end{cases}$

c) $\begin{cases} -2x^2-5x+4<0 \\ -x^2-3x+10>0 \end{cases}$ d) $\begin{cases} 4x^2-5x-6<0 \\ -4x^2+12x-5<0 \end{cases}$

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $2x^2+9x+7>0 \Leftrightarrow x<-\dfrac{7}{2} \vee x>-1$

$x^2+x-6<0 \Leftrightarrow -3<x<2$

Do đó: $\begin{cases} 2x^2+9x+7>0 \\ x^2+x-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-\dfrac{7}{2} \vee x>-1 \\ -3<x<2 \end{cases} \Leftrightarrow -1<x<2$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=(-1;2)$.

b) Ta có: $\begin{cases} 2x^2+x-6>0 \\ 3x^2-10x+3>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-2 \vee x>\dfrac{3}{2} \\ x<\dfrac{1}{3} \vee x>3 \end{cases} \Leftrightarrow x<-2 \vee x>3$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=(-\infty;-2)\cup(3;+\infty)$.

c) $\begin{cases} -2x^2-5x+4<0 \\ -x^2-3x+10>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x^2+5x-4>0 \\ x^2+3x-10<0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x<\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4} \vee x>\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4} \\ -5<x<2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -5<x<\frac{-5-\sqrt{57}}{4} \vee \frac{-5+\sqrt{57}}{4}<x<2$$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=\left(-5;\dfrac{-5-\sqrt{57}}{4}\right)\cup\left(\dfrac{-5+\sqrt{57}}{4};2\right)$.

d) $\begin{cases} 4x^2-5x-6<0 \\ -4x^2+12x-5<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\dfrac{3}{4}<x<2 \\ x<\dfrac{1}{2} \vee x>\dfrac{5}{2} \end{cases} \Leftrightarrow -\frac{4}{3}<x<\frac{1}{2}$

Vậy tập nghiệm của hệ là $S=\left(-\dfrac{3}{4};\dfrac{1}{2}\right)$.

**Đề 4.53:** Tìm tập xác định của hàm số:

$$y=\sqrt{9-x^2}+\frac{1}{\sqrt{x^2-3x+2}}+x-3.$$

***Hướng dẫn giải***

Hàm số đã cho xác định $\Leftrightarrow \begin{cases} 9-x^2\geq 0 \\ x^2-3x+2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3\leq x\leq 3 \\ x<1 \vee x>2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -3\leq x<1 \vee 2<x\leq 3$

Vậy tập xác định của hàm số đã cho là: $D=[-3;1)\cup(2;3]$.

**Đề 4.54:** Tìm m để các bất phương trình sau đúng với mọi x:

a) $3x^2 - mx + m^2 + 1 > 0$.

b) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$.

c) $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $3x^2 - mx + m^2 + 1 > 0, \forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 3 > 0 \\ m^2 - 12(m^2+1) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -11m^2 - 12 < 0 \Leftrightarrow m \in R$$

Vậy với mọi m, ta đều có: $3x^2 - mx + m^2 + 1 > 0, \forall x$.

b) $(m-1)x^2 - 2(m+1)x + 3(m-2) > 0$ (*)

❖ Với m = 1: (*) trở thành: $-4x - 3 > 0 \Leftrightarrow x < -\frac{4}{3}$.

Nghĩa là (*) không đúng, với mọi x.

Vậy m = 1 không thỏa yêu cầu bài toán.

❖ Với $m \neq 1$: (*) đúng $\forall x \Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m-1 > 0 \\ (m+1)^2 - (m-1).3(m-2) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ -2m^2 + 11m - 5 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m > 1 \\ m < \frac{1}{2} \vee m > 5 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m > 5.$$

Tóm lại: (*) đúng với mọi x $\Leftrightarrow m > 5$.

c) $mx^2 - 4(m+1)x + m - 5 < 0$ (* *)

❖ Với m = 0: (* *) $\Leftrightarrow -4x - 5 < 0 \Leftrightarrow x > -\frac{5}{4}$.

Nghĩa là (* *) không đúng với mọi x.

Vậy m = 0 không thỏa yêu cầu bài toán.



❖ Với $m \neq 0$: (* *) đúng với mọi x $\Leftrightarrow \begin{cases} a < 0 \\ \Delta' < 0 \end{cases}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 4(m+1)^2 - m(m-5) < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ 3m^2 + 13m + 4 < 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m < 0 \\ -4 < m < -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -4 < m < -\frac{1}{3}$$

Tóm lại: $-4 < m < -\frac{1}{3}$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Đề 4.55:** Tìm m để hàm số sau xác định với mọi x:

$$y = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}.$$

***Hướng dẫn giải***

Hàm số: $y = \sqrt{x^2 + mx + m - 1}$ xác định với mọi x $\Leftrightarrow x^2 + mx + m - 1 \geq 0, \forall x$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a > 0 \\ \Delta \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 1 > 0 \\ m^2 - 4(m-1) \leq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow m^2 - 4m + 4 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow (m-2)^2 \leq 0$$

$$\Leftrightarrow m = 2.$$

**Đề 4.56:** Với giá trị nào của tham số m, các bất phương trình sau vô nghiệm?

a) $(m+2)x^2 - 2(m-1)x + 4 < 0$.

b) $(m-3)x^2 + (m+2)x - 4 > 0$.

***Hướng dẫn giải***

a) Bất phương trình $(m+2)x^2-2(m-1)x+4<0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow (m+2)x^2-2(m-1)x+4\geq 0, \forall x$ (*)

❖ Với m = −2: (*) $\Leftrightarrow 6x+4\geq 0, \forall x$ (sai).

Vậy m = −2 không thỏa yêu cầu bài toán.

❖ Với $m\neq -2$: (*) $\Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ \Delta'\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m+2>0 \\ (m-1)^2-4(m+2)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ m^2-6m-7\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m>-2 \\ -1\leq m\leq 7 \end{cases} \Leftrightarrow -1\leq m\leq 7$

Vậy $-1\leq m\leq 7$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Bất phương trình $(m-3)x^2+(m+2)x-4>0$ vô nghiệm

$\Leftrightarrow (m-3)x^2+(m+2)x-4\leq 0, \forall x$ (* *)

❖ Với m = 3: (* *) $\Leftrightarrow 5x-4\leq 0, \forall x$ (sai)

Vậy m = 3 không thỏa yêu cầu bài toán.

❖ Với $m\neq 3$: (* *) $\Leftrightarrow \begin{cases} a<0 \\ \Delta\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m-3<0 \\ (m+2)^2+16(m-3)\leq 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ m^2+20m-44\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m<3 \\ -22\leq m\leq 2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow -22\leq m\leq 2$

Vậy $-22\leq m\leq 2$ thỏa yêu cầu bài toán.

**Đề 4.57:** Tìm các giá trị của tham số m để phương trình sau có hai nghiệm dương phân biệt:

a) $(3-m)x^2+2mx+m+2=0$.

b) $(m+1)x^2-2(2m-1)x+6m-3=0$.



***Hướng dẫn giải***

a) Phương trình $(3-m)x^2+2mx+m+2=0$ có hai nghiệm dương phân biệt.

$\Leftrightarrow \begin{cases} a\neq 0 \\ \Delta'>0 \\ P>0 \\ S>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3-m\neq 0 \\ m^2-(3-m)(m+2)>0 \\ \dfrac{m+2}{3-m}>0 \\ -\dfrac{2m}{3-m}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ 2m^2-m-6>0 \\ -2<m<3 \\ m<0\vee m>3 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq 3 \\ m<-\dfrac{3}{2}\vee m>2 \\ -2<m<3 \\ m<0\vee m>3 \end{cases} \Leftrightarrow -2<m<-\dfrac{3}{2}$

Vậy $-2\leq m\leq -\dfrac{3}{2}$ thỏa yêu cầu bài toán.

b) Phương trình $(m+1)x^2-2(2m-1)x+6m-3=0$ có hai nghiệm dương phân biệt

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ \Delta'=(2m-1)^2-(m+1)(6m-3)>0 \\ P=\dfrac{6m-3}{m+1}>0 \\ S=\dfrac{2(2m-1)}{m+1}>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ -2m^2-7m+4>0 \\ m<-1\vee m>\dfrac{1}{2} \\ m<-1\vee m>\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} m\neq -1 \\ \dfrac{1}{2}<m<4 \\ m<-1\vee m>\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \dfrac{1}{2}<m<4.$

**Đề 4.58:** Tìm các giá trị của m để phương trình sau có bốn nghiệm phân biệt:

$$(m+3)x^4-3(m-1)x^2+4m=0.$$

***Hướng dẫn giải***

$(m+3)x^4-3(m-1)x^2+4m=0$ (1)

Đặt: $t=x^2$, điều kiện $t\ge 0$, ta có:

$(1)\Leftrightarrow (m+3)t^2-3(m-1)t+4m=0$ (2)

❖ (1) có 4 nghiệm phân biệt

$\Leftrightarrow$ (2) có 2 nghiệm dương phân biệt

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m+3\neq 0\\ \Delta=9(m-1)^2-16m(m+3)>0\\ P=\dfrac{4m}{m+3}>0\\ S=\dfrac{3(m-1)}{m+3}>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -3\\ -7m^2-66m+9>0\\ m<-3\vee m>0\\ m<-3\vee m>1\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq -3\\ \dfrac{33-\sqrt{1152}}{7}<m<\dfrac{33+\sqrt{1152}}{7}\\ m<-3\vee m>0\\ m<-3\vee m>1\end{cases}\Leftrightarrow \frac{33-\sqrt{1152}}{7}<m<-3.$$

**Đề 4.59:** Cho phương trình: $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$. Tìm m để phương trình trên có hai nghiệm trái dấu.

***Hướng dẫn giải***

Phương trình: $mx^2-2(m-2)x+m-3=0$ có hai nghiệm trái dấu

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\neq 0\\ P<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\neq 0\\ \dfrac{m-3}{m}<0\end{cases}\Leftrightarrow 0<m<3.$$

*
**



# §7. ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai

* ***Định lí:*** *Cho tam thức bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c$ *và một số* $\alpha$.

*Nếu* $af(\alpha)<0$ *thì* $f(x)$ *có hai nghiệm phân biệt* $x_1,x_2\ (x_1<x_2)$ *và* $\alpha\in(x_1;x_2)$.

### II. So sánh một số với các nghiệm của một tam thức bậc hai

Xét tam thức bậc hai $f(x)=ax^2+bx+c$ và một số thực $\alpha$.

Ta có quy tắc so sánh một số với nghiệm của một tam thức bậc hai trong bảng sau:

| Điều kiện | | Kết luận |
|---|---|---|
| $af(\alpha)<0$ | | $f(x)$ có hai nghiệm $x_1<x_2$ và $\alpha\in(x_1;x_2)$ |
| $af(\alpha)=0$ | | $f(x)$ có nghiệm ($\alpha$ là một nghiệm) |
| $af(\alpha)>0$ | $\Delta<0$ | $f(x)$ vô nghiệm |
| | $\Delta\ge 0$ | $f(x)$ có hai nghiệm $x_1<x_2$ và $\alpha\notin[x_1;x_2]$ |

* ***Ghi chú:*** Trường hợp $\alpha\in[x_1;x_2]$ để biết $\alpha$ ở bên trái hay bên phải $x_1;x_2$, cần xét dấu $\dfrac{S}{2}-\alpha$, trong đó $S=x_1+x_2$.

+ Nếu $\dfrac{S}{2}-\alpha>0$ thì $\alpha<x_1\le x_2$.

+ Nếu $\dfrac{S}{2}-\alpha<0$ thì $x_1\le x_2<\alpha$.

### III. Các hệ quả

* ***Hệ quả 1:*** *Phương trình bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c=0$ *có hai nghiệm phân biệt khi và chỉ khi tồn tại số* $\alpha$ *sao cho* $af(\alpha)<0$.

* ***Hệ quả 2:*** *Cho tam thức bậc hai* $f(x)=ax^2+bx+c$ *và hai số* $\alpha,\beta$ *sao cho* $\alpha<\beta$. *Để phương trình* $f(x)=0$ *có hai nghiệm, một nghiệm nằm trong khoảng* $(\alpha;\beta)$, *nghiệm kia nằm ngoài đoạn* $[\alpha;\beta]$, *thì điều kiện cần và đủ là* $f(\alpha).f(\beta)<0$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 4.60:** Xét tam thức $f(x)=2x^2-(m+7)x+3m$. Tính $f(3)$ và suy ra rằng với mọi m, $f(x)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

***Hướng dẫn giải***

$f(x)$ có hệ số a = 2.

Ta có: $f(3)=2.3^2-(m+7).3+3m=-2$.

Do đó: $af(3)=2(-2)=-4<0$ nên $\forall m$, $f(x)$ luôn có hai nghiệm phân biệt.

**Đề 4.61:** So sánh số $\alpha=4$ với các nghiệm (nếu có) của $f(x)=x^2-mx+3m-8$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\Delta=m^2-4(3m-8)=m^2-12m+32=(m-4)(m-8)$;

$$a=1, af(4)=8-m; \frac{S}{2}-4=\frac{m}{2}-4=\frac{m-8}{2}$$

❖ Nếu $af(4)<0$ (tức m > 8) thì $x_1<4<x_2$.

❖ Nếu $af(4)=0$ (tức m = 8) thì $\frac{S}{2}-4=\frac{m-8}{2}=0$ nên $x_1=4=x_2$.

❖ Nếu $af(4)>0$ (tức m < 8) thì xét các khả năng sau:

a) $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ \frac{S}{2}-4<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-4)(m-8)\ge 0\\ \frac{m-8}{2}<0\end{cases}\Leftrightarrow m-4\le 0\Leftrightarrow m\le 4$ thì $x_1\le x_2<4$.

b) $\begin{cases}\Delta\ge 0\\ \frac{S}{2}-4>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m-4)(m-8)\ge 0\\ \frac{m-8}{2}>0\end{cases}\Leftrightarrow m>8$, trái giả thiết $af(4)>0$.

Vậy: Nếu $m\le 4$ thì $x_1\le x_2<4$.

Nếu 4 < x < 8 thì f(x) vô nghiệm.

Nếu m = 8 thì $x_1=4=x_2$.

Nếu m > 8 thì $x_1<4<x_2$.



**Đề 4.62:** Với giá trị nào của m, phương trình $(m-1)x^2-4mx+3m+10=0$ có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2?

***Hướng dẫn giải***

Xét $f(x)=(m-1)x^2-4mx+3m+10$.

Ta có: a = m – 1

$\Delta'=4m^2-(m-1)(3m+10)=m^2-7m+10=(m-2)(m-5)$;

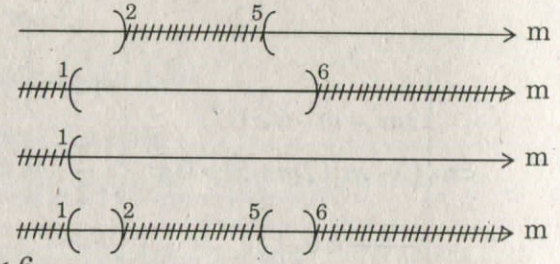
$af(2)=(m-1)(-m+6)$;

$\frac{S}{2}-2=\frac{2m}{m-1}-2=\frac{2}{m-1}$.

Để phương trình có hai nghiệm phân biệt lớn hơn 2 ta phải có đồng thời

$$\begin{cases}\Delta'>0 \text{ (để phương trình có hai nghiệm phân biệt)}\\ af(2)>0 \text{ (để } \alpha=2 \text{ nằm ngoài đoạn hai nghiệm)}\\ \frac{S}{2}-2>0 \text{ (để } \alpha=2 \text{ nhỏ hơn cả hai nghiệm)}\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m-2)(m-5)>0\\ (m-1)(-m+6)>0\\ \frac{2}{m-1}>0\end{cases}\Leftrightarrow$$




Đáp số: 1 < m < 2 ; 5 < m < 6.

**Đề 4.63:** So sánh số –2 với các nghiệm của các phương trình sau:

a) $2x^2-9x-15=0$ b) $x^2+(m+3)x+2m+1=0$

c) $mx^2+(m-2)x-3m-4=0 (m\ne 0)$.

***Hướng dẫn giải***

a) Đặt $f(x)=2x^2-9x-15$

Ta có: $af(-2)=2.11=22>0$

$\frac{S}{2}+2=\frac{9}{4}+2=\frac{17}{4}>0$ và $\Delta=201>0$

Do đó: $-2<x_1<x_2$.

b) Đặt $f(x)=x^2+(m+3)x+2m+1$.

Ta có: $af(-2)=1.(-1)=-1<0\Rightarrow x_1<-2<x_2$.

c) Đặt: $f(x)=mx^2+(m-2)x-3m-4$

$af(-2)=m(-m)=-m^2<0\Rightarrow x_1<-2<x_2$.

**Đề 4.64:** Cho phương trình: $(3-m)x^2+2mx+m+2=0$.

Tìm những giá trị của m để phương trình:

a) Có hai nghiệm nhỏ hơn 1.

b) Có một nghiệm thuộc khoảng (–1 ; 3) còn nghiệm kia lớn hơn 3.

***Hướng dẫn giải***

a) Phương trình có hai nghiệm $x_1, x_2$ nhỏ hơn 1

$$\Leftrightarrow x_1\le x_2<1\Leftrightarrow\begin{cases}\Delta'\ge 0\\ af(1)>0\\ \dfrac{S}{2}-1<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m^2-(3-m)(m+2)\ge 0\\ (3-m)(3-m+2m+m+2)>0\\ \dfrac{-m}{3-m}-1<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}2m^2-m-6\ge 0\\ (3-m)(2m+5)>0\\ \dfrac{-3}{3-m}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}m\le-\dfrac{3}{2}\vee m\ge 2\\ -\dfrac{5}{2}<m<3\\ m<3\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{5}{2}<m\le-\frac{3}{2}\vee 2\le m<3$$

b) Phương trình có một nghiệm thuộc khoảng (–1 ; 3) còn nghiệm kia lớn hơn 3.

$\Leftrightarrow -1<x_1<3<x_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}af(3)<0\\ af(-1)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(3-m)\left[9(3-m)+6m+m+2\right]<0\\ (3-m)(3-m-2m+m+2)>0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(3-m)(29-2m)<0\\ (3-m)(5-2m)>0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}3<m<\dfrac{29}{2}\\ m<\dfrac{5}{2}\vee m>3\end{cases}\Leftrightarrow 3<m<\frac{29}{2}$$



**Đề 4.65:** Xác định m để phương trình: $(m+1)x^2-2(2m-1)x+6m-3=0$ có một nghiệm nhỏ hơn –1, còn nghiệm kia lớn hơn 1.

***Hướng dẫn giải***

Phương trình có một nghiệm nhỏ hơn – 1 còn nghiệm kia lớn hơn 1.

$\Leftrightarrow x_1<-1<1<x_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}af(-1)<0\\ af(1)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(m+1+4m-2+6m-3)<0\\ (m+1)(m+1-4m+2+6m-3)<0\end{cases}$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}(m+1)(11m-4)<0\\ (m+1)(3m)<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-1<m<\dfrac{4}{11}\\ -1<m<0\end{cases}$$

$\Leftrightarrow -1<m<0.$

**Đề 4.66:** Xác định m để phương trình: $(m+3)x^2-3(m-1)x+4m=0$ có một nghiệm thuộc khoảng (–2 ; 2) còn nghiệm kia nằm ngoài đoạn [–2 ; 2].

***Hướng dẫn giải***

Đặt $f(x)=(m+3)x^2-3(m-1)x+4m$

Ta có: $f(-2)=4(m+3)+6(m-1)+4m=14m+6$

$f(2)=4(m+3)-6(m-1)+4m=2m+18$

Phương trình có một nghiệm thuộc khoảng (–2 ; 2) còn nghiệm kia nằm ngoài đoạn [–2 ; 2]

$\Leftrightarrow x_1<-2<x_2<2$ hoặc $-2<x_1<2<x_2$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}f(-2).f(2)<0\\ m+3\ne 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}(14m+6)(2m+18)<0\\ m\ne -3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-9<m<-\dfrac{3}{7}.\\ m\ne -3\end{cases}$$

*
**

# TOÁN TRẮC NGHIỆM

## ĐỀ 17: BẤT ĐẲNG THỨC

**1.** Cho a > 0 và b < 0. Trong các bất đẳng thức sau bất đẳng thức nào sai?

a) a – b > 0 b) –a > –b

c) –a < –b d) ab < 0.

**2.** Cho a, b > 0. Chứng minh: $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$. Một học sinh làm như sau:

(I) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2}{ab}\geq 2$ (1)

(II) (1) $\Leftrightarrow a^2+b^2\geq 2ab \Leftrightarrow a^2+b^2-2ab\geq 0 \Leftrightarrow (a-b)^2\geq 0$.

(III) Vì $(a-b)^2\geq 0$ đúng $\forall a,b>0$ nên $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

Cách làm trên:

a) Sai từ (I) b) Sai từ (II)

c) Sai ở (III) d) Cả (I), (II), (III) đều đúng.

**3.** Trong các tính chất sau, tìm tính chất sai.

a) $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow a+c<b+d$ b) $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow \frac{a}{c}<\frac{b}{d}$

c) $\begin{cases}0<a<b\\0<c<d\end{cases}\Rightarrow ac<bd$ d) $\begin{cases}0<a\leq b\\0<c\leq d\end{cases}\Rightarrow ac\leq bd$.

**4.** Cho a < b và $n\in N^*$ ta luôn có:

a) $a^n=b^n$ b) $a^n<b^n$

c) $a^n>b^n$ d) Cả a, b, c đều sai.

Hãy chọn khẳng định đúng trong các khẳng định trên.

**5.** Trong các khẳng định sau, khẳng định nào đúng với mọi giá trị của c.

a) 8c > 4c b) 4c > 8c

c) $8c^2\geq 4c^2$ d) $8c^2>4c^2$.

**6.** Tìm mệnh đề đúng trong các mệnh đề sau:

a) $a<b\Rightarrow \frac{1}{a}>\frac{1}{b}$ b) $a<b\Rightarrow ac<bc$.

c) $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow ac<bd$ d) Cả a, b, c đều sai.



**7.** Tìm mệnh đề đúng nhất trong các mệnh đề sau:

a) $\begin{cases}a\leq b\\c<d\end{cases}\Rightarrow a+c<b+d$ b) $a\leq b\Rightarrow a+c\leq b+c$

c) $a\leq b\Leftrightarrow\left[\begin{array}{l}a<b\\a=b\end{array}\right.$ d) Cả a, b, c đều đúng.

**8.** Mệnh đề nào sau đây sai?

a) $\begin{cases}a\leq b\\c<d\end{cases}\Rightarrow a+c\leq b+d$ b) $\begin{cases}a\leq b\\c\leq d\end{cases}\Rightarrow ac\leq bd$

c) $\begin{cases}a\leq b\\c>d\end{cases}\Rightarrow a-c\leq b-d$ d) $ac\leq bc\Rightarrow a\leq b$ (với c > 0).

**9.** Trong các tính chất sau, tìm tính chất sai:

a) $\begin{cases}a<b\\c<d\end{cases}\Rightarrow a-c<b-d$ b) $a<b+c\Leftrightarrow a-c<b$

c) $a<b\Leftrightarrow a-c<b-c$ d) $a<b\Leftrightarrow a+c<b+c$.

**10.** Tìm khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) $7\leq 10$ b) 7 < 10

c) $7\leq 7$ d) Cả a, b, c đều đúng.

## ĐỀ 18: BẤT ĐẲNG THỨC CÔSI – BẤT ĐẲNG THỨC CHỨA GIÁ TRỊ TUYỆT ĐỐI

**1.** Trong các số sau, số nào là trung bình cộng của 2 số a và b?

a) a + b b) 2 (a + b)

c) $\frac{a+b}{2}$ d) $\sqrt{ab}.(a\geq 0;b\geq 0)$.

**2.** Trong các số sau, số nào là trung bình nhân của hai số không âm a và b.

a) $\sqrt{ab}$ b) $\frac{\sqrt{ab}}{2}$ c) ab d) $\frac{a+b}{2}$.

**3.** Cho a, b, c > 0. Xét các bất đẳng thức:

(I) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\geq 2$.

(II) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$.

(III) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\geq 4$. Bất đẳng thức nào đúng?

a) Chỉ (I) đúng
b) Chỉ (II) đúng
c) Chỉ (III) đúng
d) Cả (I), (II), (III) đều đúng.

**4.** Cho a, b, c > 0. Xét các bất đẳng thức:

(I) $a+b+c\geq 3\sqrt[3]{abc}$.

(II) $(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)\geq 9$.

(III) $(a+b)(b+c)(c+a)\geq 9$. Bất đẳng thức nào đúng?

a) Chỉ (I) và (II) đúng
b) Chỉ (I) và (III) đúng
c) Chỉ (I) đúng
d) Cả (I), (II), (III) đều đúng.

**5.** Trong các hình chữ nhật có cùng chu vi thì:

a) Hình vuông có diện tích nhỏ nhất.
b) Hình vuông có diện tích lớn nhất.
c) Không xác định được hình có diện tích lớn nhất.
d) Cả a, b, c đều sai.

**6.** Cho a, b, c > 0. Xét các bất đẳng thức.

(I) $\left(1+\frac{a}{b}\right)\left(1+\frac{b}{c}\right)\left(1+\frac{c}{a}\right)\geq 8$.

(II) $\left(\frac{2}{a}+b+c\right)\left(\frac{2}{b}+c+a\right)\left(\frac{2}{c}+a+b\right)\geq 64$.

(III) $a+b+c\leq abc$. Bất đẳng thức nào đúng.

a) Chỉ (I) đúng
b) Chỉ (II) đúng
c) Chỉ (I) và (II) đúng
d) Cả (I), (II) và (III) đều đúng.

**7.** Cho a > 0. Trong các bất đẳng sau, bất đẳng thức nào đúng?

(I) $a+1\geq 2\sqrt{a}$.

(II) $a+2\geq 3\sqrt[3]{a}$.

(III) $a+3\geq 4\sqrt[4]{a}$.

a) Chỉ (I) đúng
b) Chỉ (I) và (II) đúng
c) Chỉ (I) và (III) đúng
d) Cả (I), (II) và (III) đều đúng.

**8.** Cho a, b, c > 0 và a + b + c = 1. Dùng bất đẳng thức Côsi ta chứng minh được: $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)\geq 64$. Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

a) a = b = c
b) a = b = c = 1
c) $a=b=c=\frac{1}{3}$
d) Một đáp số khác.

**9.** Hãy tìm mệnh đề đúng nhất trong các mệnh đề sau:

a) $|x|\leq 3\Leftrightarrow -3\leq x\leq 3$
b) $|x|<5\Leftrightarrow x\in(-5;5)$
c) $|x|>7\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x<-7 \\ x>7 \end{array}\right.$
d) Cả a, b, c đều đúng.

**10.** Cho bất đẳng thức: $|a-b|\leq|a|+|b|$. Hỏi dấu đẳng thức xảy ra khi và chỉ khi nào?

a) a = b
b) $ab\leq 0$
c) $ab\geq 0$
d) ab = 0.

## ĐỀ 19: BẤT PHƯƠNG TRÌNH MỘT ẨN

**1.** Tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình:

$$\frac{1}{x+2}+x-1<\frac{1}{x+1}+\sqrt{x^2+1}.$$

a) $x\neq -2; x\neq -1$
b) x > −1
c) $x\neq -1$
d) $x\neq -2$.

**2.** Tìm các giá trị của x thỏa mãn điều kiện của bất phương trình:

$$\sqrt[3]{x+2}+\sqrt{x+3}+\frac{1}{x}>2x-3.$$

a) $x\geq -2$
b) $x\geq -3$.
c) $x\geq -3$ và $x\neq 0$
d) $x\geq -2$ và $x\neq 0$.

**3.** Trong các cặp bất phương trình sau, cặp nào không tương đương?

a) $5x-1+\frac{1}{x-2}<\frac{1}{x-2}$ và 5x − 1 < 0

b) $5x-1+\frac{1}{x-2}>\frac{1}{x-2}$ và 5x − 1 > 0

c) $x^2(x+3)<0$ và x + 3 < 0

d) $x^2(x+5)\geq 0$ và $x+5\geq 0$.

**4.** Giải bất phương trình: $\sqrt{x^2(x+3)}\leq 0$.

a) x = −3
b) x = 0
c) x = −3 ; x = 0
d) $x\geq -3$.

**5.** Giải bất phương trình: $|2x+6|\sqrt{x+1} \le 0$. Đáp số là:

a) x = –3 ; x = –1 b) x = –3

c) x = –1 d) Một đáp số khác.

**6.** Tìm tập nghiệm của bất phương trình: $|3x-2|\left(x^2+1\right) \ge 0$. Đáp số là:

a) $\left(\frac{2}{3};+\infty\right)$ b) $\left[\frac{2}{3};+\infty\right)$ c) $\left(-\infty;\frac{2}{3}\right)$ d) R.

**7.** Khi giải bất phương trình: $\frac{2x}{x-1}-3>0$. Một học sinh làm như sau:

(I) $\frac{2x}{x-1}-3>0 \Leftrightarrow \frac{2x}{x-1}>3$ (1)

(II) (1) $\Leftrightarrow 2x>3(x-1)$ (2)

(III) (2) $\Leftrightarrow 2x>3x-3 \Leftrightarrow x<1$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $(-\infty;1)$.

Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì:

a) Sai từ bước (I) b) Sai từ bước (II)

c) Sai ở bước (III) d) Cả (I), (II), (III) đều đúng.

**8.** Khi giải bất phương trình: $x+5+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-1}$ một học sinh làm như sau:

(I) $\frac{x+5}{2}+\frac{1}{x-1}>\frac{1}{x-1}+x \Leftrightarrow \frac{x+5}{2}>x$ (1)

(II) $(1) \Leftrightarrow x+5>2x$ (2)

(III) $(2) \Leftrightarrow x<5$.

Vậy bất phương trình có tập nghiệm $(-\infty;5)$. Cách giải trên đúng hay sai? Nếu sai thì:

a) Sai từ bước (I) b) Sai từ bước (II)

c) Sai ở bước (III) d) Cả (I), (II), (III) đều đúng.

**9.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} 3x+\frac{3}{5}<x+2 \\ \frac{6x-3}{2}<2x+1 \end{cases}$



a) $x<\frac{5}{2}$ b) $\frac{7}{10}<x<\frac{5}{2}$

c) $x<\frac{7}{10}$ d) Vô nghiệm.

**10.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases} \frac{4x+5}{6}<x-3 \\ 2x+3>\frac{7x-4}{3} \end{cases}$

a) $x<\frac{23}{2}$ b) x > 13

c) x < 13 d) $\frac{23}{2}<x<13$.

## ĐỀ 20: DẤU CỦA NHỊ THỨC BẬC NHẤT

**1.** Tập nghiệm của bất phương trình: 0x + 2 > 0 là:

a) R b) ∅ c) $(-2;+\infty)$ d) $(-\infty;-2)$.

**2.** Tập nghiệm của bất phương trình: 0x + 2 < 0 là:

a) R b) ∅ c) $(-2;+\infty)$ d) $(-\infty;-2)$.

**3.** Tập nghiệm của bất phương trình: $(x-1)(x+3) \ge 0$ là:

a) (–3 ; 1) b) [–3 ; 1]

c) $(-\infty;-3] \cup [1;+\infty)$ d) $(-\infty;-3] \cap [1;+\infty)$.

**4.** Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{x+2}{x-5} \le 0$ là:

a) [–2 ; 5] b) (–2 ; 5)

c) $(-2;5]$ d) $[-2;5)$.

**5.** Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{x^2-1}{3-x^2} \ge 0$ là:

a) $\left[-\sqrt{3};-1\right] \cup \left[1;\sqrt{3}\right]$ b) $\left(-\sqrt{3};-1\right] \cup \left[1;\sqrt{3}\right)$

c) $\left(-\infty;-\sqrt{3}\right) \cup [-1;1] \cup \left(\sqrt{3};+\infty\right)$ d) ∅.

**6.** Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{1}{x-1} < \frac{1}{x+1}$ là:

a) R  b) $\varnothing$  c) (–1 ; 1)  d) Một đáp số khác.

**7.** Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{4}{x+3} \le 2$ là:

a) $(-\infty;-3)\cup[-1;+\infty)$  b) $(-3;-1]$

c) $[-1;+\infty)$  d) $(-\infty;-1]$.

**8.** Tập nghiệm của bất phương trình: $\frac{-4x+1}{3x+1} \le -3$ là:

a) $\left[-\frac{4}{5};-\frac{1}{3}\right]$  b) $\left[-\frac{4}{5};-\frac{1}{3}\right)$

c) $\left(-\infty;-\frac{4}{5}\right]$  d) $\left[-\frac{4}{5};+\infty\right)$.

**9.** Tập nghiệm của bất phương trình: $|x-5|<2$ là

a) (–5 ; 7)  b) (5 ; 7)

c) [3 ; 7]  d) (3 ; 7).

**10.** Tập nghiệm của bất phương trình $|1-3x|>2$ là:

a) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)\cup(1;+\infty)$  b) $(1;+\infty)$

c) $\left(-\infty;-\frac{1}{3}\right)$  d) Một đáp số khác.

## ĐỀ 21: BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT HAI ẨN DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

**1.** Trong các cặp số sau, cặp số nào không là nghiệm của bất phương trình: 2x + y < 1.

a) (0 ; 0)  b) (3 ; –7)

c) (–2 ; 1)  d) (0 ; 1).

**2.** Trong các cặp số sau, cặp số nào không là nghiệm của bất phương trình: $x-4y+5\ge 0$.

a) (–5 ; 0)  b) (–2 ; 1)

c) (0 ; 0)  d) (1 ; –3).



**3.** Trong các cặp số sau, cặp số nào không là nghiệm của hệ bất phương trình: $\begin{cases} x+y-2\le 0 \\ 2x-3y+2>0 \end{cases}$.

a) (0 ; 0)  b) (1 ; 1).

c) (–1 ; 1)  d) (–1 ; –1).

**4.** Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức: $f(x)=-x^2+6x-9$.

a)

| x | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | |

b)

| x | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | – | 0 | + | |

c)

| x | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | + | |

d)

| x | $-\infty$ | | 3 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | – | 0 | – | |

**5.** Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x)=x^2+12x+36$.

a)

| x | $-\infty$ | | –6 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | – | 0 | + | |

b)

| x | $-\infty$ | | –6 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | – | |

c)

| x | $-\infty$ | | –6 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | + | |

d)

| x | $-\infty$ | | –6 | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | – | 0 | – | |

**6.** Bảng xét dấu nào sau đây là của tam thức $f(x)=-x^2-x+6$.

a)

| x | $-\infty$ | | –2 | | 3 | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | – | 0 | + | 0 | |

b)

| $x$ | $-\infty$ | | $-2$ | | $3$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

c)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | − | 0 | + | 0 | − | |

d)

| $x$ | $-\infty$ | | $-3$ | | $2$ | | $+\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | + | 0 | − | 0 | + | |

**7.** Tập nghiệm của bất phương trình $x^2-4x+3<0$ là:

a) $(-\infty;1)\cup(3;+\infty)$ b) (1 ; 3)

c) $(-\infty;1)\cup[3;+\infty)$ d) [1 ; 3].

**8.** Tập nghiệm của bất phương trình $-x^2+6x+7\geq 0$ là:

a) $(-\infty;-1]\cup[7;+\infty)$ b) [−1 ; 7]

c) $(-\infty;-7]\cup[1;+\infty)$ d) [−7 ; 1].

**9.** Tập nghiệm của bất phương trình $2x^2-7x-15\geq 0$ là:

a) $\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right]\cup[5;+\infty)$ b) $\left[-\frac{3}{2};5\right]$

c) $(-\infty;-5]\cup\left[\frac{3}{2};+\infty\right)$ d) $\left[-5;\frac{3}{2}\right]$.

**10.** Tập nghiệm của bất phương trình $x(x+5)\leq x(x^2+2)$ là:

a) $(-\infty;1]\cup[4;+\infty)$ b) [1 ; 4]

c) $(-\infty;1]\cap[4;+\infty)$ d) Một đáp số khác.

## ĐỀ 22: DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI BẤT PHƯƠNG TRÌNH BẬC HAI

**1.** Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{3x-x^2}$

a) $(-\infty;0]\cup[3;+\infty)$ b) [0 ; 3]

c) (0 ; 3) d) R.

**2.** Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{6-x-x^2}+\frac{x+3}{x-2}$.

a) [−3 ; 2] b) $(-\infty;-3]\cup(2;+\infty)$

c) (−3 ; 2) d) $[-3;2)$.



**3.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}x^2+x+1\leq 0\\ x^2-x-2>0\end{cases}$.

a) $x<-1\vee x>2$ b) $-1<x<2$

c) Vô nghiệm d) Một đáp số khác.

**4.** Giải hệ bất phương trình: $\begin{cases}x^2-2x-3>0\\ x^2-11x+28\geq 0\end{cases}$.

a) $x<-1\vee 3<x\leq 4\vee x\geq 7$ b) $x\leq 4\vee x\geq 7$

c) $x<-1\vee x\geq 7$ d) Một đáp số khác.

**5.** Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{x^2-3x+2}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}$.

a) $(-\infty;1)\cup[2;+\infty)$ b) $(-\infty;1]\cup[2;+\infty)$

c) $[2;+\infty)$ d) $(1;2]$.

**6.** Tìm tập xác định của hàm số: $y=\sqrt{x^2-4x}+\sqrt{25-x^2}$.

a) $[-5;0]\cup[4;5]$ b) $(-5;0)\cup(4;5)$

c) $(-\infty;0]\cup[4;+\infty)$ d) [−5 ; 5].

**7.** Tìm m để phương trình sau có nghiệm:

$$(m-2)x^2+2(2m-3)x+5m-6=0.$$

a) $1\leq m\leq 3$ và $m\neq 2$ b) $1\leq m\leq 3$

c) $m\leq 1\vee m\geq 3$ d) Một đáp số khác.

**8.** Tìm m để $x^2+(m+1)x+2m+7>0$ với mọi x.

a) $-3\leq m\leq 9$ b) $m<-3\vee m>9$

c) $-3<m<9$ d) $m\leq -3\vee m\geq 9$.

**9.** Tìm m để bất phương trình sau vô nghiệm:

$$(m-3)x^2+(m+2)x-4>0.$$

a) $m\leq -22\vee m\geq 2$ b) $-22\leq m\leq 2$

c) $-22<m<2$ d) Một đáp số khác.

**10.** Giải bất phương trình: $(x^2-3x)\sqrt{2x^2-3x-2}\geq 0$.

a) $x\leq -\frac{1}{2}\vee x=2\vee x\geq 3$ b) $x\leq -\frac{1}{2}\vee x\geq 3$

c) $-\frac{1}{2}\leq x\leq 3$ d) $x<-\frac{1}{2}\vee x>3$.

## ĐỀ 23: ĐỊNH LÍ ĐẢO VỀ DẤU CỦA TAM THỨC BẬC HAI

**1.** So sánh số 2 với các nghiệm của phương trình: $x^2-3x+1=0$.

a) $x_1<2<x_2$ b) $x_1<x_2<2$

c) $2<x_1<x_2$ d) $x_1<x_2=2$.

**2.** So sánh số 3 với các nghiệm của phương trình: $x^2-mx-10+3m=0$.

a) $x_1<x_2<3$ b) $3<x_1<x_2$

c) $x_1<3<x_2$ d) $3=x_1<x_2$.

**3.** Tìm m để phương trình: $x^2-2mx+3m-2=0$ có hai nghiệm thỏa: $1<x_1<2<x_2$.

a) $m\le 2$ b) $m\ge 2$ c) m < 2 d) m > 2.

**4.** Tìm m để phương trình: $(m+1)x^2-2(2m-1)x+3(2m-1)=0$ có hai nghiệm thỏa: $x_1<-1<1<x_2$.

a) $-1\le m\le 0$ b) $-1<m<0$

c) $m\le -1\vee m\ge 0$ d) $m<-1\vee m>0$.

**5.** Tìm m để phương trình: $mx^2-x+1-m=0$ có hai nghiệm âm.

a) $m\in\varnothing$ b) $0<m<1$ và $m\ne\frac{1}{2}$

c) $0<m<1$ d) $m\in R$.

**6.** Tìm m để phương trình: $x^2+2(m+1)x+9m-5=0$ có hai nghiệm âm phân biệt.

a) $\frac{5}{9}\le m\le 1$ hoặc $m\ge 6$ b) $\frac{5}{9}<m<1$ hoặc m > 6

c) $m<\frac{5}{9}$ hoặc $1<m<6$ d) m > 6.

**7.** Tìm m để phương trình: $4x^2-(3m+1)x-m-2=0$ có hai nghiệm thỏa: $x_1<-1<2<x_2$.

a) $-\frac{3}{2}<m<\frac{12}{7}$ b) $m<-\frac{3}{2}\vee m>\frac{12}{7}$

c) $m\in\varnothing$ d) $m\in R$.



**8.** Tìm m để phương trình: $(m+1)x^2-3mx+4m=0$ có một nghiệm thuộc (–1 ; 1) còn nghiệm kia nhỏ hơn – 1.

a) $-\frac{1}{2}\le m\le -\frac{1}{8}$ b) $m\le -\frac{1}{2}\vee m\ge\frac{-1}{8}$

c) $-\frac{1}{2}<m<-\frac{1}{8}$ d) $m<-\frac{1}{2}\vee m>-\frac{1}{8}$.

**9.** Cho $f(x)=ax^2+bx+c(a\ne 0)$ và hai số $\alpha,\beta$ sao cho $\alpha<\beta$. Điều kiện cần và đủ để phương trình $f(x)=0$ có một nghiệm nằm trong khoảng $(\alpha,\beta)$ và nghiệm kia nằm ngoài đoạn $[\alpha,\beta]$ là:

a) $\begin{cases}af(\alpha)<0\\af(\beta)>0\end{cases}$ b) $f(\alpha).f(\beta)<0$

c) $f(\alpha).f(\beta)\le 0$ d) $f(\alpha).f(\beta)>0$.

**10.** Cho $f(x)=ax^2+bx+c$. Điều kiện cần và đủ để phương trình $f(x)=0$ có hai nghiệm phân biệt là tồn tại một $\alpha$ sao cho:

a) $af(\alpha)\le 0$ b) $af(\alpha)\ge 0$

c) $af(\alpha)>0$ d) $af(\alpha)<0$.

## ĐỀ 24: ÔN TẬP CHƯƠNG IV

**1.** Cho a, b, c > 0. Dùng bất đẳng thức Côsi hãy điền vào khoảng trống (...).

a) $a+b\ge\ldots$ b) $\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\ge\ldots$

c) $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\ge\ldots$ d) $(a+b)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)\ge\ldots$

**2.** Hãy điền vào chỗ trống (...). Tập xác định của hàm số:

a) $y=\sqrt{x-3}+x-4$ là: D = ...

b) $y=\sqrt{x-1}+\sqrt{4-x}$ là: D = ...

c) $y=\sqrt{|x|+2}-3x+1$ là: D = ...

d) $y=\sqrt{2-|x|}+\frac{1}{|x|+3}$ là: D = ...

**3.** Lấy cột 2 đặt vào vị trí ... của cột 1 để được một khẳng định đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Tập nghiệm của bất phương trình $2x+3>x+4$ là: ... | A) $T=(-\infty,-1)\cup(1,+\infty)$ |
| b) Tập nghiệm của bất phương trình $5x-1<3x+1$ là: ... | B) $T=(1,+\infty)$ |
| c) Tập nghiệm của bất phương trình $\|x\|-1>0$ là: ... | C) $T=(-\infty,1)$ |
| d) Tập nghiệm của bất phương trình $\|x\|-1<0$ là: ... | D) $T=(-1;1)$ |

**4.** Đánh dấu "x" vào ô đúng , sai tương ứng với các mệnh đề:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $x^2-5x+4>0,\forall x$. | | |
| b) $x^2+x+1\geq 0,\forall x$. | | |
| c) $-x^2+5x-12<0,\forall x$. | | |
| d) $-x^2+3x-4\leq 0,\forall x$ | | |

**5.** Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng với các mệnh đề.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x^2-5x}$ là [0 ; 5] | | |
| b) Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{7+6x-x^2}$ là [-1 ; 7] | | |
| c) Tập xác định của hàm số $y=\dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+x+1}}$ là $R\setminus\{1\}$ | | |
| d) Tập xác định của hàm số $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{5-x^2}$ là $\left[2;\sqrt{5}\right]$ | | |

**6.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Tập nghiệm của hệ $\begin{cases}x-1\geq 0\\x^2-3>0\end{cases}$ là T = ...

b) Tập nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2+3>0\\x^2-3x+2\leq 0\end{cases}$ là T = ...



c) Tập nghiệm của hệ $\begin{cases}x^2-5x+4\leq 0\\x^2+6x-7\geq 0\end{cases}$ là T = ...

d) Tập nghiệm của hệ $\begin{cases}12-3x^2>0\\x^2+x-2\leq 0\end{cases}$ là T = ...

**7.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... của cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Tập nghiệm của bất phương trình $(x+1)(x-2)\geq 0$ là: ... | A) $(-\infty,-1)\cup[2;+\infty)$ |
| b) Tập nghiệm của bất phương trình $(x+1)(x-2)\leq 0$ là: ... | B) $[-1;2]$ |
| c) Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x+1}{x-2}\geq 0$ là: ... | C) $(-\infty;-1]\cup[2;+\infty)$ |
| d) Tập nghiệm của bất phương trình $\dfrac{x-2}{x+1}\geq 0$ là: ... | D) $(-\infty;-1]\cup(2;+\infty)$ |

**8.** Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng với các khẳng định sau:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $(x+1)\sqrt{x+7}\leq 0\Leftrightarrow x=-1\vee x=-7$ | | |
| b) $\|x\|\sqrt{x-3}\leq 0\Leftrightarrow x=0\vee x=3$ | | |
| c) $\sqrt{x^2(x-3)}\leq 0\Leftrightarrow x=0\vee x=3$ | | |
| d) $(x+1)\sqrt{x-2}\leq 0\Leftrightarrow x=-1\vee x=2$. | | |

**9.** Hãy điền vào chỗ trống:

a) Bất phương trình: $|2x-3|<1$ có tập nghiệm T = ...

b) Bất phương trình: $|x+3|\geq 1$ có tập nghiệm T = ...

c) Bất phương trình: $|x+5|<0$ có tập nghiệm T = ...

d) Bất phương trình: $\sqrt[4]{x^2+x-2}+\sqrt{x+1}\leq -2$ có tập nghiệm T = ...

**10.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... của cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) $mx^2-2(m-1)x-3m+3=0$. có hai nghiệm $x_1<1<x_2 \Leftrightarrow$ ... | A) $-1<m<3$ |
| b) $(m-5)x^2-2mx+m-4=0$ có hai nghiệm $x_1<1<2<x_2 \Leftrightarrow$ ... . | B) $5<m<8$ |
| c) $(m-2)x^2-2(m+1)x+2m-6=0$ có hai nghiệm trái dấu $\Leftrightarrow$ ... | C) $m<0 \vee m>\frac{5}{4}$ |
| d) $x^2-2mx+3+2m>0, \forall x \Leftrightarrow$ ... | D) $2<m<3$ |

❀❀❀

# ĐÁP ÁN

| Đề \ Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 17 | b | d | b | d | c | d | d | b | a | d |
| 18 | c | a | d | a | b | c | d | c | d | b |
| 19 | a | c | b | c | c | d | b | a | c | d |
| 20 | a | b | c | d | b | c | a | b | d | a |
| 21 | d | b | c | d | c | c | b | b | a | a |
| 22 | b | d | c | a | c | a | b | c | b | a |
| 23 | a | c | d | b | a | b | c | c | b | d |

**ĐỀ 24**

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $2\sqrt{ab}$ | $[3;+\infty)$ | B | S | S | $(\sqrt{3};+\infty)$ | C | Đ | (1; 2) | C |
| b | 2 | [1 ; 4] | C | Đ | Đ | [1 ; 2] | B | S | $(-\infty;-4]\cup[-2;\infty)$ | B |
| c | 3 | R | A | Đ | S | $\{1\}$ | D | Đ | $\varnothing$ | D |
| d | 4 | [-2 ; 2] | D | Đ | Đ | [-2 ; 1] | A | S | $\varnothing$ | A |



# CHƯƠNG V: THỐNG KÊ

## §1. BẢNG PHÂN PHỐI THỰC NGHIỆM TẦN SUẤT GHÉP LỚP

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Ví dụ**

Xét bảng số liệu thống kê sau:

Chiều cao của 30 học sinh (đơn vị là cm)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 151 | 158 | 160 | 162 | 159 | 172 | 153 | 167 | 171 | 170 |
| 161 | 162 | 157 | 152 | 150 | 165 | 167 | 157 | 155 | 158 |
| 160 | 161 | 157 | 167 | 164 | 162 | 151 | 166 | 170 | 172 |

**Bảng 1**

Bảng phân phối thực nghiệm rời rạc lập từ các số liệu thống kê trên nói chung cồng kềnh và khó sử dụng. Do đó người ta thường ghép những số liệu thống kê gần nhau vào một lớp (nghĩa là phân lớp các số kiệu thống kê) rồi lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất của các lớp.

Quá trình này bao gồm các bước:

**1.** ***Phân lớp***

Ta phân các số liệu thống kê đã cho vào 4 lớp sau:

- Lớp thứ 1 là $[150cm;156cm)$.
- Lớp thứ 2 là $[156cm;162cm)$.
- Lớp thứ 3 là $[162cm;168cm)$.
- Lớp thứ 4 là $[168cm;174cm]$.

**2.** ***Xác định giá trị trung tâm, tần số, tần suất của các lớp***

Xét lớp thứ i, với các đầu nút $x_i$ và $x_{i+1}$ (i = 1, 2, 3, 4)

Ta gọi:

a) Số $x_i^0=\frac{x_i+x_{i+1}}{2}$ là giá trị trung tâm của lớp thứ i.

b) Số $n_i$ các số liệu thống kê thuộc lớp thứ i là tần số của lớp đó.

c) Số $f_i=\frac{n_i}{n}$ ($n_i$ là tần số của lớp thứ i, n là số các số liệu thống kê) là tần suất của lớp thứ i.

Như vậy theo ví dụ trên, ta có:

❖ Giá trị trung tâm của lớp thứ 1; 2; 3; 4 theo thứ tự là:

$$x_1^0 = \frac{150+156}{2} = 153(cm)$$

$$x_2^0 = \frac{156+162}{2} = 159(cm)$$

$$x_3^0 = \frac{162+168}{2} = 165(cm)$$

$$x_4^0 = \frac{168+174}{2} = 171(cm)$$

❖ Tần số của các lớp thứ 1; 2; 3; 4 theo thứ tự là:

$n_1 = 6; n_2 = 10; n_3 = 9; n_4 = 5$

❖ Số liệu thống kê: n = 30.

❖ Tần suất của các lớp 1; 2; 3; 4 theo thứ tự là:

$$f_1 = \frac{6}{30} = 20\%; f_2 = \frac{10}{30} = 33,3\%;$$

$$f_3 = \frac{9}{30} = 30\%; f_4 = \frac{5}{30} = 16,7\%.$$

**3. *Thành lập bảng***

Dựa vào các kết quả thu được, ta lập bảng chiều cao của 30 học sinh.

| Các lớp số đo của chiều cao X(cm) (1) | $x_i^0$ (2) | Tần suất $f_i(\%)$ (3) |
|---|---|---|
| [150;156) | 153 | 20,0 |
| [156;162) | 159 | 33,3 |
| [162;168) | 165 | 30,0 |
| [168; 174] | 171 | 16,7 |
| | **Cộng** | **100%** |

**Bảng 2**

Ta gọi bảng 2 là bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp.

* ***Ghi chú:*** Có thể viết bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp dạng "dọc" thành bảng dạng "ngang".

**4. *Nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê***

Theo bảng 2 ta thấy nửa khoảng [156;168) chứa thành phần có tần suất cao nhất và chứa trên 50% các số liệu thống kê, nên ta nói các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào nửa khoảng [156;168).



**II. Chú ý**

1. Trong bảng 2, nếu thay cột (3) bằng cột tần số thì sẽ có bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp.
2. Nếu ghép thêm cột tần số vào bảng 2 thì sẽ có bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp.
3. Để dễ so sánh, các tần suất thường được tính ở dạng tỉ số phần trăm.
4. Có nhiều cách phân lớp một bảng số liệu thống kê, tùy thuộc yêu cầu của bài toán cụ thể.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 5.1:** Cho bảng số liệu thống kê:

Năng xuất lúa hè thu (tạ/ha) năm 1998 của 31 tỉnh từ Nghệ An trở vào

| | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | 30 | 25 | 25 | 35 | 45 | 40 | 40 | 35 | 45 | 35 |
| 25 | 45 | 30 | 30 | 30 | 40 | 30 | 25 | 45 | 45 | |
| 35 | 35 | 30 | 40 | 40 | 40 | 35 | 35 | 35 | 35 | |

a) Hãy lập:
- Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc.
- Bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc.

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy đưa ra nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê.

***Hướng dẫn giải***

a) * Bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc:

*Năng suất lúa hè thu của 31 Tỉnh (tạ/ha)*

| Năng suất lúa $x_i$ (tạ/ha) | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 4 | 7 | 9 | 6 | 5 | 31 |

* Bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc:

*Năng suất lúa hè thu của 31 Tỉnh (tạ/ha)*

| Năng suất lúa $x_i$ (tạ/ha) | 25 | 30 | 35 | 40 | 45 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần suất $f_i(\%)$ | 12,9 | 22,6 | 29,0 | 19,4 | 16,1 | 100% |

b) Dựa vào kết quả của câu a) ta có nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê như sau: năng suất 30 và 35 (tạ/ha) có tần suất cao nhất và chứa trên 50% các số liệu thống kê. Vậy các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào năng suất 30 và 35 (tạ/ha).

**Đề 5.2:** Cho bảng số liệu thống kê:

Thời gian (phút) hoàn thành một bài tập toán của mỗi học sinh lớp 10A.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 20,8 | 20,7 | 23,1 | 20,7 | 20,9 | 20,9 | 23,9 | 21,6 |
| 25,3 | 21,5 | 23,8 | 20,7 | 23,3 | 19,8 | 20,9 | 20,1 |
| 21,3 | 24,2 | 22,0 | 23,8 | 24,1 | 21,1 | 22,8 | 19,5 |
| 19,7 | 21,9 | 21,2 | 24,2 | 24,3 | 22,2 | 23,5 | 23,9 |
| 22,8 | 22,5 | 19,9 | 23,8 | 25,0 | 22,9 | 22,8 | 22,7. |

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

$[19,5;20,5)$; $[20,5;21,5)$; $[21,5;22,5)$

$[22,5;23,5)$; $[23,5;24,5)$; $[24,5;25,5]$ .

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê đã cho.

***Hướng dẫn giải***

a) Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp:

*Thời gian (phút) hoàn thành một bài tập toán của 40 học sinh lớp 10A*

| Các lớp thời gian X (phút) | $x_i^0$ | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i(\%)$ |
|---|---|---|---|
| $[19,5;20,5)$ | 20 | 5 | 12,5 |
| $[20,5;21,5)$ | 21 | 10 | 25,0 |
| $[21,5;22,5)$ | 22 | 5 | 12,5 |
| $[22,5;23,5)$ | 23 | 8 | 20,0 |
| $[23,5;24,5)$ | 24 | 10 | 25,0 |
| $[24,5;25,5]$ | 25 | 2 | 5,0 |
| **Cộng** | | **40** | **100%** |

b) Các nửa khoảng $[20,5;21,5)$ và $[23,5;24,5)$ chứa thành phần có tần suất cao nhất (tổng cộng bằng 50% các số liệu thống kê). Vậy số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào hai nửa khoảng nói trên.

**Đề 5.3:** Cho bảng số liệu thống kê:

Giá trị thành phẩm quy ra tiền (đơn vị: nghìn đồng) trong 30 ngày sản xuất của một phân xưởng hóa chất.

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 180 | 186 | 190 | 204 | 192 | 200 | 201 | 203 | 191 | 202 |
| 200 | 212 | 205 | 211 | 240 | 213 | 216 | 208 | 209 | 222 |
| 221 | 220 | 203 | 225 | 206 | 228 | 231 | 220 | 239 | 210 |



a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

$[180;192);[192;204);[204;216);[216;228);[228;240]$.

b) Biết rằng định mức lao động của phân xưởng là "mỗi ngày phải sản xuất được tối thiểu 204 nghìn đồng". Hãy xác định xem số ngày mà phân xưởng hoàn thành định mức lao động chiếm một tỉ lệ là bao nhiêu phần trăm (trong 30 ngày được khảo sát).

***Hướng dẫn giải***

a) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp :

*Giá trị thành phẩm quy ra tiền (đơn vị: nghìn đồng) trong 30 ngày của một phân xưởng hóa chất*

| Các lớp giá trị thành phẩm quy ra tiền X(đơn vị: nghìn đồng) | $x_i^0$ | Tần suất $f_i(\%)$ |
|---|---|---|
| $[180;192)$ | 186 | 13,3 |
| $[192;204)$ | 198 | 23,4 |
| $[204;216)$ | 210 | 30,0 |
| $[216;228)$ | 222 | 20,0 |
| $[228;240]$ | 234 | 13,3 |
| | **Cộng** | **100%** |

b) Qua bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp ở trên ta thấy số ngày mà phân xưởng hoàng thành định mức lao động chiếm tỉ lệ: 30,0% + 20,0% + 13,3% = 63,3%

**Đề 5.4:** Cho bảng số liệu thống kê:

Sản lượng thủy sản nuôi trồng năm 2000 (đơn vị: 10 tấn) của 30 tỉnh từ Thừa Thiên - Huế trở ra:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 775 | 1165 | 522 | 40 | 280 | 1245 |
| 1942 | 557 | 86 | 131 | 419 | 834 |
| 391 | 433 | 20 | 89 | 33 | 312 |
| 872 | 1763 | 51 | 303 | 164 | 200 |
| 554 | 1902 | 27 | 626 | 94 | 74 |

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

$[20;320);[320;620);[620;920);[920;1220)$

$[1220;1520);[1520;1820);[1820;2120]$

b) Dựa vào kết quả của câu a), hãy nêu nhận xét về xu hướng tập trung của các số liệu thống kê đã cho.

***Hướng dẫn giải***

a) Bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp:

*Sản lượng thủy sản nuôi trồng năm 2000 (đơn vị: 10 tấn)*

| Các lớp sản lượng X (10 tấn) | $x_i^0$ | Tần suất $f_i(\%)$ |
|---|---|---|
| [20; 320) | 170 | 43,33 |
| [320; 620) | 470 | 26,675 |
| [620; 920) | 770 | 13,33 |
| [920; 1220) | 1070 | 3,33 |
| [1220; 1520) | 1370 | 3,33 |
| [1520; 1820) | 1670 | 3,33 |
| [1820; 2120] | 1970 | 6,675 |
| | **Cộng** | **100%** |

b) Nhận xét nửa khoảng $[20,620)$ chứa thành phần có tần suất cao nhất và chứa trên 50% các số liệu thống kê. Vậy các số liệu thống kê có xu hướng tập trung vào nửa khoảng $[20,620)$.

*
**

# §2. BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT – BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Biểu đồ tần suất và đường gấp khúc tần suất

**1. *Biểu đồ tần suất hình cột***

***Ví dụ 1:*** Xét bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp:

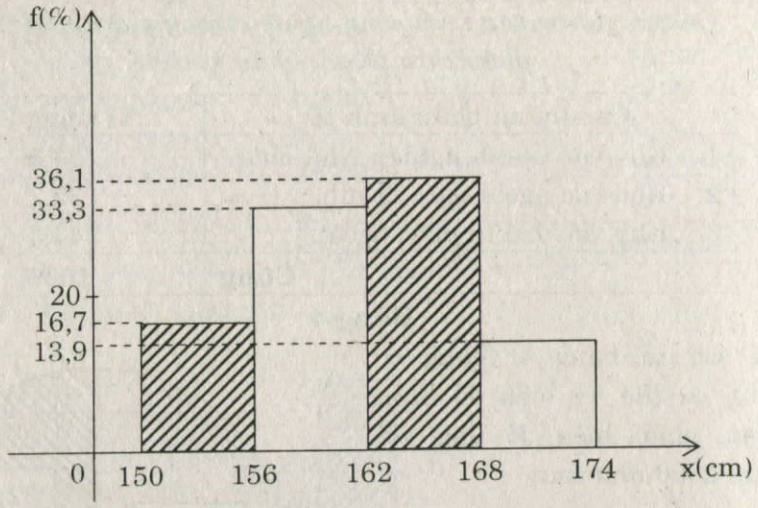
*Chiều cao của 36 sinh viên*

| Các lớp số đo của chiều cao X(cm) (1) | $x_i^0$ (2) | Tần suất $f_i(\%)$ (3) |
|---|---|---|
| [150;156) | 153 | 16,7 |
| [156;162) | 159 | 33,3 |
| [162;168) | 165 | 36,1 |
| [168;174] | 171 | 13,9 |
| | **Cộng** | **100(%)** |

**Bảng 3**



Để mô tả bảng 3, có thể vẽ biểu đồ tần suất hình cột:



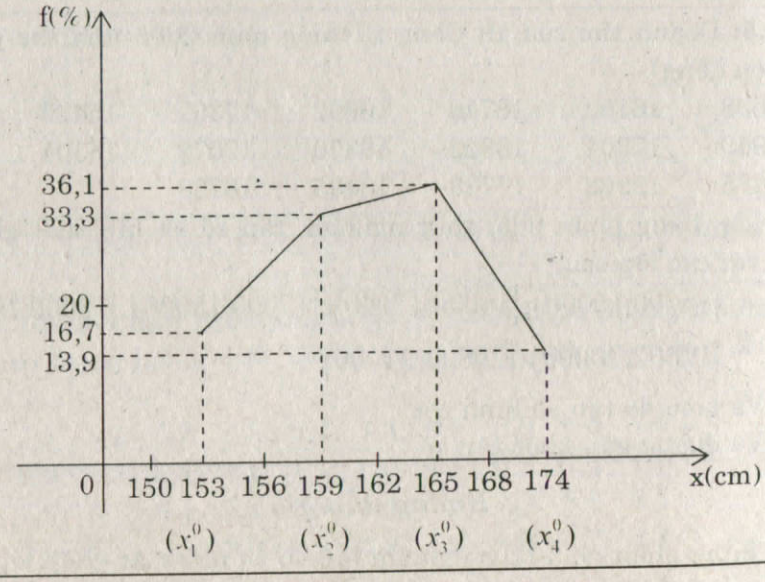

**2. *Đường gấp khúc tần suất***

Cũng có thể mô tả bảng 3 bằng một đường gấp khúc vẽ như sau:

❖ Trên mặt phẳng tọa độ, xác định các điểm $\left(x_i^0; f_i\right) = 1,2,3,4$.

❖ Vẽ các đoạn thẳng nối điểm $\left(x_i^0; f_i\right)$ với điểm $\left(x_{i+1}^0; f_{i+1}\right) = 1,2,3,$ ta thu được một đường gấp khúc.

Đường gấp khúc này được gọi là *đường gấp khúc tần suất.*



**II. Biểu đồ hình quạt**

***Ví dụ 2:*** Cho bảng:

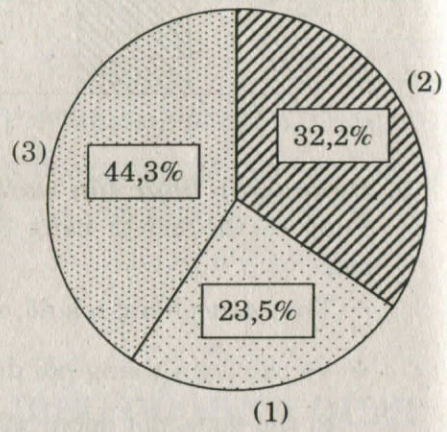
*Cơ cấu giá trị sản xuất công nghiệp trong nước năm 2000, phân theo thành phần kinh tế*

| Các thành phần kinh tế | Tỉ trọng (%) |
|---|---|
| 1. Khu vực doanh nghiệp Nhà nước. | 23,5 |
| 2. Khu vực ngoài quốc doanh. | 32,2 |
| 3. Khu vực đầu tư nước ngoài. | 44,3 |
| **Cộng** | **100%** |

**Bảng 4**

Để mô tả bảng 4 (bảng cơ cấu), có thể vẽ biểu đồ hình quạt, phần biểu đồ ứng với năm 2000 như sau:

(1) Khu vực doanh nghiệp Nhà nước.
(2) Khu vực ngoài quốc doanh.
(3) Khu vực đầu tư nước ngoài.




## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 5.5:** Doanh thu của 19 Công ti trong năm 2006 như sau (đơn vị: triệu đồng)

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 17638 | 16162 | 18746 | 16602 | 17357 | 15420 | 19630 |
| 18969 | 17301 | 18322 | 18870 | 17679 | 18101 | 16598 |
| 20275 | 19902 | 17733 | 18405 | 18739 | | |

a) Lập bảng phân phối thực nghiệm, tần số và tần suất ghép lớp với các lớp sau:

$[15000;16000);[16000;17000);[17000;18000);[18000;19000)$

$[19000;20000);[20000;21000]$

b) Vẽ biểu đồ tần số hình cột.

c) Vẽ đường gấp khúc tần số.

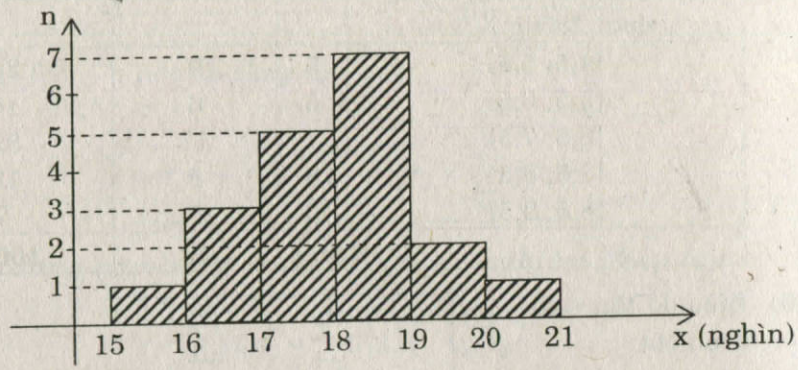
***Hướng dẫn giải***

a) Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp:

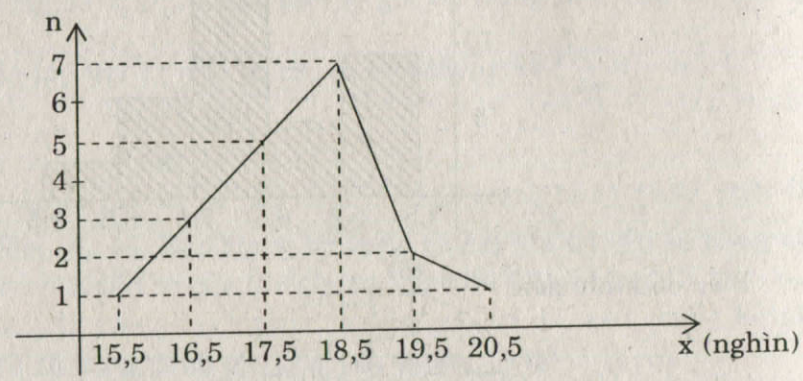


| Các lớp doanh thu X (triệu đồng) | $x_i^0$ | Tần số $x_i$ | Tần suất $f_i$(%) |
|---|---|---|---|
| [15000; 16000) | 15500 | 1 | 5,26 |
| [16000; 17000) | 16500 | 3 | 15,79 |
| [17000; 18000) | 17500 | 5 | 26,32 |
| [18000; 19000) | 18500 | 7 | 36,84 |
| [19000; 20000) | 19500 | 2 | 10,53 |
| [20000; 21000] | 20500 | 1 | 5,26 |
| | **Cộng** | **19** | **100(%)** |

b) Biểu đồ tần số hình cột:




c) Đường gấp khúc tần số:




**Đề 5.6:** Với mỗi tỉnh người ta ghi lại số phần trăm những trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500g. Sau đây là kết quả khảo sát ở 43 tỉnh (đơn vị: %)

| | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 5,1 | 5,2 | 5,2 | 5,8 | 6,4 | 7,3 | 6,5 | 6,9 | 6,6 | 7,6 |
| 8,6 | 6,5 | 6,8 | 5,2 | 5,1 | 6,0 | 4,6 | 6,9 | 7,4 | 7,7 |
| 7,0 | 6,7 | 6,4 | 7,4 | 6,9 | 5,4 | 7,0 | 7,9 | 8,6 | 8,1 |
| 7,6 | 7,1 | 7,9 | 8,0 | 8,7 | 5,9 | 5,2 | 6,8 | 7,7 | 7,1 |
| 6,2 | 5,4 | 7,4 | | | | | | | |

a) Hãy lập bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp, với các lớp sau:

$[4,5;5,5);[5,5;6,5);[6,5;7,5);[7,5;8,5);[8,5;9,5]$.

b) Vẽ biểu đồ tần suất hình cột.

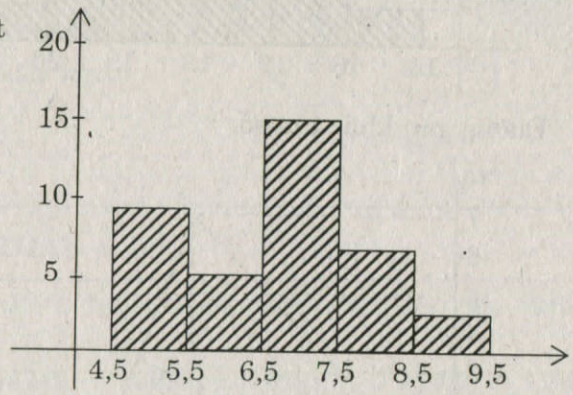
c) Vẽ biểu đồ hình quạt.

***Hướng dẫn giải***

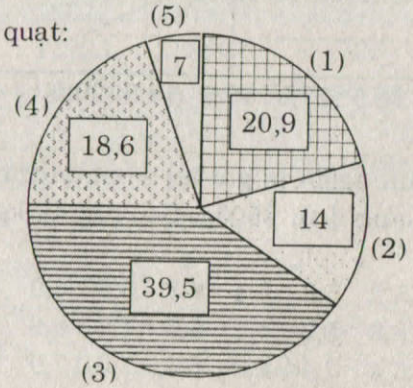
a) Bảng phân phối thực nghiệm tần số và tần suất ghép lớp:

| Các lớp phần trăm trẻ em mới sinh có trọng lượng dưới 2500g X(%) | $x_i^0$ | Tần số $n_i$ | Tần suất $f_i(\%)$ |
|---|---|---|---|
| [4,5; 5,5) | 5 | 9 | 20,9 |
| [5,5; 6,5) | 6 | 6 | 14,0 |
| [6,5; 7,5) | 7 | 17 | 39,5 |
| [7,5; 8,5) | 8 | 8 | 18,6 |
| [8,5; 9,5] | 9 | 3 | 7,0 |
| **Cộng** | | **43** | **100(%)** |

b) Biểu đồ tần suất hình cột:




c) Biểu đồ hình quạt:






# §3. SỐ TRUNG BÌNH CỘNG – MỐT – SỐ TRUNG VỊ

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Số trung bình cộng

Trung bình cộng $\bar{x}$ của các số liệu thống kê (hay của bảng phân phối thực nghiệm) được tính theo các công thức sau:

**1. *Trường hợp bảng phân phối thực nghiệm rời rạc***

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + ... + x_kx_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i$$

Vì $f_i = \frac{n_i}{n}$, nên ta cũng có:

$$\bar{x} = f_1x_1 + f_2x_2 + ... + f_kx_k = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i$$

**2. *Trường hợp bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp***

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_ix_i^0 = \sum_{i=1}^{k} f_ix_i^0$$

trong đó $x_i^0, n_i, f_i$ lần lượt là giá trị trung tâm, tần số, tần xuất của lớp thứ I , n là số các số liệu thống kê $\left(\sum_{i=1}^{k} n_i = n\right)$.

### II. Mốt

Mốt $M_0$ là giá trị có tần số lớn nhất trong bảng phân phối thực nghiệm tần số. Nếu trong bảng đó có hai giá trị tần số bằng nhau và lớn hơn tần số của các giá trị khác thì ta coi rằng

- ❖ Mốt là trung bình cộng của hai giá trị đó, nếu chúng kề nhau và số trung bình cộng này có nghĩa.
- ❖ Có hai mốt là hai giá trị đó trong những trường hợp còn lại. Một bảng phân phối thực nghiệm tần số có thể có nhiều mốt.

### III. Số trung vị

**1. *Định nghĩa***

Số trung vị của một dãy không giảm (hoặc không tăng) gồm n số liệu thống kê là:

- ❖ Số đứng giữa dãy (số hạng thứ $\frac{n+1}{2}$), nếu n lẻ.

❖ Trung bình cộng của hai số đứng giữa dãy (trung bình cộng của số hạng thứ $\frac{n}{2}$ và số hạng thứ $\frac{n+1}{2}$), nếu n chẵn.

Số trung vị được kí hiệu là $M_e$.

**2.** ***Ví dụ:*** Cho hai dãy sắp thứ tự các số liệu thống kê.

a) Tuổi của 7 con lợn trong đàn lợn I:

3, 3, 5, 6, 8, 11, 12 (tháng tuổi);

b) Tuổi của 10 con lợn trong đàn lợn II:

17, 14, 14, 11, 9, 8, 7, 4, 4, 2 (tháng tuổi).

Ta có:

❖ Số trung vị của dãy a) là $M_e = 6$ tháng.

❖ Số trung vị của dãy b) là $M_e = \frac{9+8}{2} = 8,5$ (tháng).

Từ đó ta thấy: Gần một nửa số lợn của đàn lợn I có độ tuổi dưới 6 tháng, một nửa số lợn của đàn lợn II có độ tuổi dưới 8,5 tháng.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 5.7:** Xem bảng tiền lương của 30 công nhân xưởng may (trong một tháng)

| Tiền lương $x_i$ (nghìn đồng) | 300 | 500 | 700 | 800 | 900 | 1000 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 3 | 6 | 5 | 5 | 6 | 5 | 30 |

a) Tính trung bình cộng $\bar{x}$ của bảng thống kê.

b) Hãy tìm mốt $M_0$ của bảng phân phối thực nghiệm trên.

***Hướng dẫn giải***

a) Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + n_5x_5 + n_6x_6\right)$$

$$= \frac{1}{30}\left(3.300 + 6.500 + 5.700 + 5.800 + 6.900 + 5.1000\right)$$

$$= 726,7 \text{ (nghìn đồng).}$$

b) Có hai mốt:

$M_0 = 500$ ; $M_0 = 900$.



**Đề 5.8:** Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp:

*Năng suất lúa năm 1985 của 31 thửa ruộng ở địa phương A*

| Các lớp giá trị của X (tạ/ha) | $x_i^0$ | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| $[15,50;20,50)$ | 18 | 3 |
| $[20,50;25,50)$ | 23 | 10 |
| $[25,50;30,50)$ | 28 | 11 |
| $[30,50;35,50]$ | 33 | 7 |
| **Cộng** | | **31** |

Tính số trung bình cộng $\bar{x}$.

***Hướng dẫn giải***

Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1^0 + n_2x_2^0 + n_3x_3^0 + n_4x_4^0\right)$$

$$= \frac{1}{31}\left(3.18 + 10.23 + 11.28 + 7.33\right)$$

$$= 26,5 \text{ (tạ/ha).}$$

**Đề 5.9:** Cho bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp:

| Các lớp giá trị của X | $[10,14)$ | $[14;18)$ | $[18;22]$ | Cộng |
|---|---|---|---|---|
| Tần suất $f_i(\%)$ | 65 | 10 | 25 | 100% |

Hãy tính số trung bình cộng của bảng phân phối thực nghiệm.

***Hướng dẫn giải***

❖ Giá trị trung tâm của các lớp: $x_1^0 = 12; x_2^0 = 16; x_3^0 = 20$.

❖ Số trung bình cộng của bảng phân phối thực nghiệm:

$$\bar{x} = f_1x_1^0 + f_2x_2^0 + f_3x_3^0 = 65\%.12 + 10\%.16 + 25\%.20 = 14,4.$$

**Đề 5.10:** Doanh thu của 8 của hàng ăn trong một ngày ở một khu phố (đơn vị: triệu đồng) như sau:

2 ; 2 ; 25 ; 2 ; 10 ; 100 ; 2 ; 10.

Tìm số trung bình cộng và số trung vị. Số nào làm đại diện tốt hơn?

***Hướng dẫn giải***

❖ Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{8}(2+2+25+2+10+100+2+10) = 19{,}13 \text{ (triệu)}$$

❖ Dãy số doanh thu có thể viết lại thành dãy không giảm

2 ; 2 ; 2 ; 2 ; 10 ; 10 ; 25 ; 100.

Dãy số có 8 số liệu thống kê nên số trung vị $M_e$ là trung bình cộng của số hạng thứ tư và thứ năm.

Vậy: $M_e = \frac{1}{2}(2+10) = 6$ (triệu).

❖ *Nhận xét:* Vì có sự chênh lệch lớn giữa các số liệu trong mẫu nên số trung vị làm đại diện tốt hơn.

**Đề 5.11:** Tuổi của 11 thành viên trong đội văn nghệ được cho bởi dãy số liệu thống kê:

12 ; 11 ; 15 ; 14 ; 10 ; 20 ; 9 ; 13 ; 13 ; 10 ; 20 (tuổi)

Hãy tính số trung vị.

***Hướng dẫn giải***

Dãy số liệu thống kê có thể viết lại thành dãy không giảm như sau:

9 ; 10 ; 10 ; 11 ; 12 ; 13 ; 13 ; 14 ; 15 ; 20 ; 20

Dãy số có 11 số liệu thống kê nên số trung vị là số hạng thứ $\frac{11+1}{2} = 6$.

Vậy số trung vị: $M_e = 13$.

*
**

# §4. PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Phương sai

**1. *Định nghĩa***

Phương sai của các số liệu thống kê (hay của bảng phân phối thực nghiệm) là một số được kí hiệu là $s_x^2, s_y^2, \ldots$, và được tính theo công thức sau:

*a)* Trường *hợp bảng phân phối thực nghiệm rời rạc:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$$



*b) Trường hợp bảng phân phối thực nghiệm ghép lớp:*

$$s_x^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i^0 - \bar{x}\right)^2 = \sum_{i=1}^{k} f_i \left(x_i^0 - \bar{x}\right)^2$$

**2. *Chú ý***

Khi hai tập hợp số liệu thống kê có cùng đơn vị đo và có số trung bình cộng bằng nhau hoặc xấp xỉ nhau, ta có: Phương sai càng nhỏ thì mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu thống kê càng bé.

**3. *Định lí***

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$$

trong đó $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i^2$ (đối với bảng phân phối rời rạc)

hoặc $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i \left(x_i^0\right)^2$ (đối với bảng phân phối ghép lớp)

### II. Độ lệch chuẩn

Ta gọi căn bậc hai của phương sai $s_x^2$ là độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê (hay của bảng phân phối thực nghiệm), kí hiệu $s_x$.

Bởi vậy, theo định lí ở trên ta có

$$s_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2}$$

Phương sai $s_x^2$ và độ lệch chuẩn $s_x$ đều được dùng để đánh giá mức độ phân tán (so với số trung bình cộng) của các số liệu thống kê. Nhưng khi cần chú ý đến đơn vị đo thì phải dùng $s_x$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 5.12:** Hai xạ thủ cùng tập bắn, mỗi người đã bắn 30 viên đạn. Kết quả như sau:

*a) Điểm số của xạ thủ A*

| Điểm số $x_i$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 3 | 3 | 8 | 9 | 7 | 30 |

*b) Điểm số của xạ thủ B*

| Điểm số $y_i$ | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 3 | 4 | 7 | 8 | 8 | 30 |

Hãy xét xem trong lần tập bắn này, xạ thủ nào bắn chụm hơn?

### *Hướng dẫn giải*

❖ Với xạ thủ A, ta có:

$$\overline{x^2} = \frac{1}{30}\left(3.6^2 + 3.7^2 + 8.8^2 + 9.9^2 + 7.10^2\right) = 73,2$$

$$\bar{x} = \frac{1}{30}(3.6 + 3.7 + 8.8 + 9.9 + 7.10) = 8,47$$

$$\left(\bar{x}\right)^2 = 71,8$$

Do đó ta có phương sai: $s_x^2 = \overline{x^2} = -\left(\bar{x}\right)^2 = 1,4$

❖ Với xạ thủ B, ta có:

$$\overline{y^2} = \frac{1}{30}\left(3.6^2 + 4.7^2 + 7.8^2 + 8.9^2 + 8.10^2\right) = 73,4$$

$$\bar{y} = \frac{1}{30}(3.6 + 4.7 + 7.8 + 8.9 + 8.10) = 8,47$$

$$\left(\bar{y}\right)^2 = 71,8$$

Do đó, ta có phương sai: $s_y^2 = \overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2 = 73,4 - 74,8 = 1,6$.

Vì hai trung bình bình cộng: $\bar{x} = \bar{y} = 8,47$.

Đồng thời $s_x^2 < s_y^2$ nên xạ thủ A bắn chụm hơn xạ thủ B.

**Đề 5.13:** Sản lượng lúa (đơn vị: tạ) của 40 thửa ruộng thí nghiệm có cùng diện tích được trình bày trong bản phân phối thực nghiệm tần số sau đây:

| Sản lượng $x_i$ | 20 | 21 | 22 | 23 | 24 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 5 | 8 | 11 | 10 | 6 | 40 |

a) Tìm sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng.
b) Tìm phương sai và độ lệch chuẩn.

### *Hướng dẫn giải*

a) Sản lượng trung bình của 40 thửa ruộng là:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1 + n_2x_2 + n_3x_3 + n_4x_4 + n_5x_5\right)$$

$$= \frac{1}{40}(5.20 + 8.21 + 11.22 + 10.23 + 6.24)$$

$$= \frac{884}{40} = 22,1 \text{ (tạ)}$$



b) Ta có: $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\left(n_1x_1^2 + n_2x_2^2 + n_3x_3^2 + n_4x_4^2 + n_5x_5^2\right)$

$$= \frac{1}{40}\left(5.20^2 + 8.21^2 + 11.22^2 + 10.23^2 + 6.24^2\right)$$

$$= \frac{19598}{40} = 489,95$$

Vậy: * Phương sai: $s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2 = 489,95 - 488,41 = 1,54$

* Độ lệch chuẩn: $s_x = \sqrt{1,54} \approx 1,24$ (tạ)

**Đề 5.14:** Số tiền điện phải trả của 50 hộ trong một khu phố được thống kê trong bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp như sau (đơn vị: nghìn đồng):

| Các lớp tiền điện (nghìn đồng) | $x_i^0$ | Tần số $n_i$ |
|---|---|---|
| [375; 449] | 412 | 6 |
| [450; 524] | 487 | 15 |
| [525; 599] | 562 | 10 |
| [600; 674] | 637 | 6 |
| [675; 749] | 712 | 9 |
| [750; 824] | 787 | 4 |
| | **Cộng** | **50** |

a) Tính số trung bình cộng.
b) Tính phương sai và độ lệch chuẩn.

### *Hướng dẫn giải*

a) Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i x_i^0$$

$$= \frac{1}{50}(6.412 + 15.487 + 10.562 + 6.637 + 9.712 + 4.787)$$

$$= \frac{28775}{50} = 575,5 \text{ (nghìn đồng)}$$

b) Ta có: $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{6} n_i\left(x_i^0\right)^2$

$$= \frac{1}{50}\left(6.412^2 + 15.487^2 + 10.562^2 + 6.637^2 + 9.712^2 + 4.787^2\right)$$

$$= \frac{17209025}{50} = 344180,5$$

Vậy: * Phương sai:

$$s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2 = 344180,5 - 331200,25 = 12980,25$$

* Độ lệch chuẩn: $s_x = 113,9$ (nghìn đồng).

**Đề 5.15:** Người ta chọn một số bút bi của hai hãng sản xuất A và B và thử xem sử dụng một bút sau bao nhiêu giờ thì hết mực. Kết quả như sau (đơn vị giờ).
Loại bút A: 23 ; 25 ; 27 ; 28 ; 30 ; 35.
Loại bút B: 16 ; 22 ; 28 ; 33 ; 46.
Tính số trung bình cộng và độ chuẩn về thời gian sử dụng của mỗi loại bút. Giả sử bút A và B có cùng một giá. Dựa vào sự khảo sát trên ta nên quyết định mua loại bút nào.

***Hướng dẫn giải***

Với loại bút A:

❖ Số trung bình cộng:

$$\bar{x} = \frac{1}{6}(23+25+27+28+30+35) = \frac{168}{6} = 28 \text{ (giờ)}$$

❖ $$\overline{x^2} = \frac{1}{6}(23^2+25^2+27^2+28^2+30^2+35^2) = \frac{4792}{6} = 798,7$$

Do đó: Phương sai: $s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}^2\right) = 798,7 - 784 = 14,7$

Và độ lệch chuẩn: $s_x \approx 3,83$ (giờ).

Với loại bút B:

❖ Số trung bình cộng:

$$\bar{y} = \frac{1}{5}(16+22+28+33+46) = \frac{145}{5} = 29 \text{ (giờ)}$$

❖ $$\overline{y^2} = \frac{1}{5}(16^2+22^2+28^2+33^2+46^2) = \frac{4729}{5} = 945,8$$

Do đó: Phương sai: $s_y^2 = \overline{y^2} - \left(\bar{y}\right)^2 = 945,8 - 841 = 104,8$

Độ lệch chuẩn: $s_y = 10,23$ (giờ).

* *Nhận xét:* Mua loại bút B có thời gian sử dụng trung bình lâu hơn. Tuy nhiên do độ lệch chuẩn lớn nên chất lượng bút B không đồng đều, do đó có thể mua nhầm loại bút có thời gian sử dụng thấp. Tóm lại nên mua loại bút A.

*
**

# §5. HỆ SỐ BIẾN THIÊN

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

Dùng phương sai (hoặc độ lệch chuẩn) chỉ so sánh được mức độ phân tán so với số trung bình cộng của các số liệu trong hai tập hợp số liệu thống kê thỏa mãn đồng thời hai điều kiện:

❖ Các số liệu thống kê có cùng đơn vị đo.

❖ Hai số trung bình cộng của các số liệu thống kê trong hai tập hợp đó là bằng nhau hoặc xấp xỉ nhau.

Trong trường hợp ngược lại, người ta sử dụng một số đặc trưng khác được tính theo công thức.

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.100\%$$

Số này được gọi là *hệ số biến thiên* của các số liệu thống kê.

Có thể sử dụng hệ số biến thiên để so sánh *mức độ phân tán so với số trung bình cộng* của các số liệu trong hai tập hợp số liệu thống kê bất kì.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 5.16:** Khi nghiên cứu dấu hiệu X: "Chiều cao của mỗi người trong một nhóm sinh viên" và dấu hiệu Y: "Chiều cao của mỗi người trong một nhóm học sinh cấp I", người ta tính được.

$$\bar{x} = 162,5cm; s_x = 5,1cm$$

$$\bar{y} = 112,6cm; s_y = 4,6cm$$

Hãy xét xem nhóm nào (nhóm sinh viên hay nhóm học sinh) có chiều cao đồng đều hơn?

***Hướng dẫn giải***

Các điều kiện đã cho xác định hai tập hợp số liệu thống kê mà hai số trung bình cộng của các số liệu trong hai tập hợp đó là khác xa nhau. Vì vậy, ở đây không sử dụng được phương sai (và không sử dụng được độ lệch chuẩn).

Ở đây có thể sử dụng hệ số biến thiên để giải như sau:

$$v_x = \frac{5,1}{162,5}.100\% \approx 3,1\%$$

$$v_y = \frac{4,6}{112,6}.100\% \approx 4,1\%$$

Vì $v_y > v_x$ nên các số đo chiều cao trong nhóm sinh viên có *độ phân tán so với số trung bình cộng* là bé hơn. Do đó có thể nói rằng nhóm sinh viên có chiều cao đồng đều hơn.

**Đề 5.17:** Cuối năm 2000, khi điều tra ở một xí nghiệp theo dấu hiệu X: "Năng suất lao động (kg)" và theo dấu hiệu Y: "Giá thành đơn vị sản phẩm (nghìn đồng)", người ta tính được:

- $\bar{x} = 400kg$ và $s_x = 60kg$
- $\bar{y} = 3,8$ nghìn đồng và $s_y = 0,19$ nghìn đồng

Hãy xét xem trong kết quả điều tra, các số liệu thống kê theo dấu hiệu nào (trong hai dấu hiệu kể trên) có độ phân tán (so với số trung bình cộng) là lớn hơn.

***Hướng dẫn giải***

Ta có các hệ số biến thiên:

$$v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.100\% = \frac{60}{400}.100\% = 15\%$$

$$v_y = \frac{s_y}{\bar{y}}.100\% = \frac{0,19}{3,8}.100\% = 5\%$$

Rõ ràng $v_x > v_y$. Vậy trong kết quả điều tra, các số liệu thống kê theo dấu hiệu "Năng suất lao động" có độ phân tán lớn hơn.

*
**



# TOÁN TRẮC NGHIỆM

## ĐỀ 25: BẢNG PHÂN PHỐI THỰC NGHIỆM TẦN SUẤT GHÉP LỚP

- ***Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp***

*(Dùng cho câu 1, 2, 3, 4, 5, 6)*

| Các lớp giá trị của X | [50;52) | [52;54) | [54;56) | [56;58) | [58;60] | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 15 | 20 | 45 | ... | 5 | 100 |

**1.** Giá trị trung tâm của lớp [50;52) là:
a) 50 b) 51 c) 52 d) 53.

**2.** Tần số của lớp [50;52) là:
a) 15 b) 20 c) 45 d) 5.

**3.** Tần số của lớp [56;58) là:
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20.

**4.** Tần suất của lớp [52;54) là:
a) 5% b) 10% c) 15% d) 20%.

**5.** Tần suất của lớp [56;58) là:
a) 5% b) 10% c) 15% d) 20%.

**6.** Số các số liệu thống kê là:
a) 20 b) 45 c) 5 d) 100.

- ***Cho bảng phân phối thực nghiệm tần suất rời rạc***

*(Dùng cho câu 7, 8, 9, 10)*

Biết tần số của số 2 là: $n_2 = 5$

| $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f_i(\%)$ | 20 | 10 | 30 | 20 | ... | 10 | 100% |

**7.** Tần số của số 4 là:
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20.

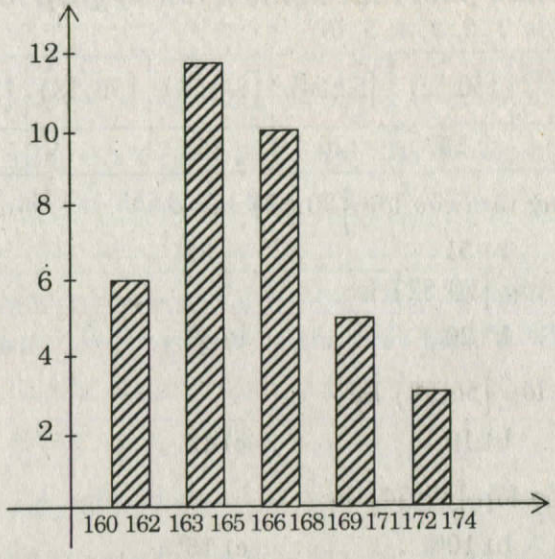
**8.** Tần suất của số 5 là:
a) 10% b) 15% c) 20% d) 25%

**9.** Tần số của số 3 là:
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20.

**10.** Số các số liệu thống kê là:
a) 30 b) 40 c) 50 d) 60.

## ĐỀ 26: BIỂU ĐỒ TẦN SUẤT – BIỂU ĐỒ HÌNH QUẠT

• ***Xem biểu đồ tần số hình cột của chiều cao 36 học sinh (đơn vị: cm) như sau*** *(Dùng cho câu 1, 2, 3)*




**1.** Có bao nhiêu học sinh có chiều cao nằm trong khoảng 166cm-168cm?

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12.

**2.** Có bao nhiêu học sinh có chiều cao nằm trong khoảng 160cm-168cm?

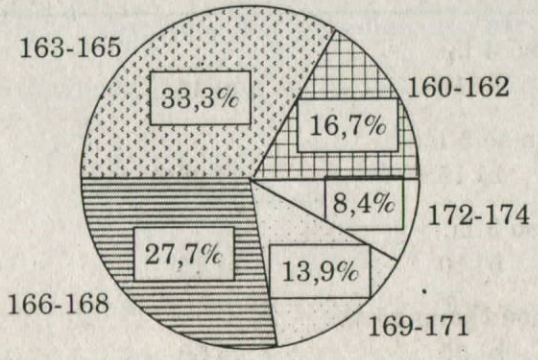
a) 6 b) 12 c) 10 d) 28.

**3.** Tần suất của lớp [163 ; 165] là:

a) 12% b) 33,3%

c) 50% d) Một đáp số khác.

• ***Xem biểu đồ hình quạt của chiều cao 36 học sinh (đơn vị: cm)*** *(Dùng cho câu 4, 5, 6, 7)*






**4.** Tính số học sinh có chiều cao nằm trong khoảng 172cm-174cm?

a) 2 b) 3 c) 4 d) 5.

**5.** Tính tần số của lớp [163; 165].

a) 12 b) 6

c) 33 d) Một đáp số khác.

**6.** Giá trị trung tâm của lớp [166; 168].

a) 166 b) 167

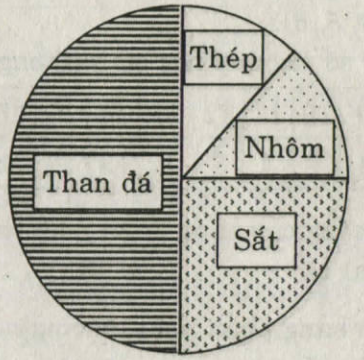
c) 168 d) Một đáp số khác.

**7.** Tần số của lớp [160 ; 162] là:

a) 4 b) 5

c) 10 d) Một đáp số khác.

• ***Xem biểu đồ hình quạt của thống kê giá trị xuất khẩu của một nước là*** *(Dùng cho câu 8, 9, 10)*




**8.** Nguyên liệu nào xuất khẩu nhiều nhất?

a) Sắt b) Than đá c) Nhôm d) Thép.

**9.** Cho biết giá trị xuất khẩu của sắt là 200 triệu USD. Tính giá trị xuất khẩu của than đá?

a) 200 triệu USD b) 400 triệu USD

c) 500 triệu USD d) 600 triệu USD.

**10.** Cho biết giá trị xuất khẩu của than đá là 600 triệu USD. Tính giá trị xuất khẩu của nhôm?.

a) 300 triệu USD b) 200 triệu USD

c) 150 triệu USD d) 100 triệu USD.

## ĐỀ 27: SỐ TRUNG BÌNH CỘNG – MỐT – SỐ TRUNG VỊ

• ***Xem bảng phân phối thực nghiệm tần số (rời rạc)***
(Dùng cho câu 1, 2, 3)

Chiều cao (cm) của 50 học sinh

| Chiều cao $x_i$ (cm) | 152 | 156 | 160 | 164 | 168 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 5 | 10 | 20 | 5 | 10 | 50 |

**1.** Số trung bình cộng của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 152 b) 156 c) 160 d) 160,4.

**2.** Mốt của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 152 b) 156 c) 160 d) 156 và 168.

**3.** Số trung vị của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 160 b) 156 c) 152 d) Một đáp số khác.

• ***Xem bảng phân phối thực nghiệm tần số (rời rạc)***
*(Dùng cho câu 4, 5, 6)*

Điểm số của 100 học sinh (thang điểm 20)

| Điểm số $x_i$ | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 1 | 1 | 3 | 5 | 8 | 13 | 19 | 24 | 14 | 10 | 2 | 100 |

**4.** Số trung bình cộng của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 13 b) 14 c) 15 d) 15,23.

**5.** Số trung vị của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 14 b) 15 c) 15,5 d) 16.

**6.** Mốt của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 16 b) 17 c) 15 d) 14.

• ***Xem bảng phân phối thực nghiệm tần số (rời rạc)***
*(Dùng cho câu 7, 8, 9)*

Các cỡ áo bán ra tại một cửa hàng trong một tháng

| Cỡ áo | 36 | 37 | 38 | 39 | 40 | 41 | 42 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Số áo bán được | 13 | 45 | 110 | 184 | 126 | 40 | 5 | 523 |

**7.** Số trung bình cộng của bảng phân phối thực nghiệm:
a) 38,97 b) 37,97 c) 40,97 d) 39.

**8.** Mốt của bảng phân phối thực nghiệm.
a) 37 b) 38 c) 39 d) 40.



**9.** Số trung vị của bảng phân phối thực nghiệm.
a) 38,97 b) 38 c) 39 d) 40.

**10.** Xem bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp:

| Các lớp giá trị của X | [10;12) | [12;14) | [14;16] | Cộng |
|---|---|---|---|---|
| Tần suất $f_i$ (%) | 10 | 25 | 65 | 100% |

Khi đó số trung bình cộng là:
a) 13 b) 14 c) 15 d) 14,1.

## ĐỀ 28: PHƯƠNG SAI VÀ ĐỘ LỆCH CHUẨN – HỆ SỐ BIẾN THIÊN

• ***Xem bảng phân phối nghiệm tần số (rời rạc)***
*(Dùng cho câu 1, 2, 3, 4)*

Chiều cao (cm) của 20 học sinh

| Chiều cao $x_i$ | 150 | 155 | 160 | 165 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 2 | 5 | 8 | 5 | 20 |

**1.** Tính số trung bình cộng của các số liệu thống kê
a) 155 b) 157 c) 159 d) 161.

**2.** Tính phương sai của các số liệu thống kê
a) 18,5 b) 19,5 c) 20,5 d) 21,5.

**3.** Tính độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê
a) ≈4,30 b) ≈4,42 c) ≈4,53 d) ≈4,63.

**4.** Tính hệ số biến thiên của các số liệu thống kê
a) ≈2,78% b) ≈3,78% c) ≈4,78% d) ≈5,78%.

• ***Xem tiền cước phí điện thoại (đơn vị: nghìn đồng) của 5 gia đình trong khu phố A phải trả được ghi lại như sau: 27; 33; 42; 38; 40*** *(Dùng cho câu 5, 6, 7, 8)*

**5.** Tính số trung bình cộng của các số liệu thống kê.
a) 34 b) 36 c) 38 d) 40.

**6.** Tính phương sai của các số liệu thống kê.
a) 25,2 b) 27,2 c) 29,2 d) Một đáp số khác.

**7.** Tính độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê.
a) 5,02 b) 5,22 c) 5,40 d) Một đáp số khác.

**8.** Tính hệ số biến thiên của các số liệu thống kê.

a) 14%  b) 14,5%  c) 15%  d) Một đáp số khác.

**9.** Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7.
Phương sai của các số liệu thống kê đã cho là:

a) 1  b) 2  c) 3  d) 4.

**10.** Cho dãy số liệu thống kê: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8.
Tính độ lệch chuẩn của các số liệu thống kê đã cho.

a) ≈2,30  b) ≈3,30  c) ≈4,30  d) ≈5,30.

## ĐỀ 29: ÔN TẬP CHƯƠNG V

**1.** Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số ghép lớp.

| Các lớp giá trị của X | [12,14) | [14,16) | [16,18] | Cộng |
|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 10 | 15 | 25 | 50 |

Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Giá trị trung tâm của lớp thứ hai: $x_2^0$ = ...

b) Tần số của lớp thứ ba: $n_3$ = ...

c) Tần suất của lớp thứ nhất: $f_1$ = ...

d) Số các số liệu thống kê: n = ...

**2.** Cho bảng phân phối tần suất ghép lớp: (Số các số liệu thống kê n = 200)

| Lớp các giá trị của X | [20,30) | [30,40) | [40,50] | Cộng |
|---|---|---|---|---|
| Tần suất $f_i$ | 20 | 30 | ... | 100% |

Đánh dấu "x" vào ô đúng sai tương ứng với các mệnh đề.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Giá trị trung tâm của lớp thứ nhất: $x_1^0 = 25$ | | |
| b) Tần suất của lớp thứ ba: $f_3 = 50\%$ | | |
| c) Tần số của lớp thứ ba: $n_3 = 80$ | | |
| d) Tần số của lớp thứ hai: $n_2 = 60$ | | |

**3.** Cho dãy sắp thứ tự các số liệu thống kê: 3, 3, 5, 6, 8, 12, 12.
Hãy điền vào khoảng trống (...)

a) Số trung bình cộng của dãy: $\bar{x}$ = ...

b) Số trung vị của dãy: $M_e$ = ...



c) Phương sai: $s_x^2$ = ...

d) Độ lệch chuẩn: $s_x$ = ...

• ***Cho bảng phân phối thuộc nghiệm tần số rời rạc***

*(Dùng cho câu 4, 5)*

Chiều cao của 50 cây lim

| Chiều cao $x_i$ (cm) | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 6 | 7 | 10 | 10 | 9 | 8 | 50 |

**4.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... của cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Tần suất của số 9. | A) 16% |
| b) Tần suất của số 11. | B) 12% |
| c) Tần suất của số 13. | C) 20% |
| d) Tần suất của số 14. | D) 18% |

**5.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Số các số liệu thống kê: n = ...

b) Số trung bình cộng: $\bar{x}$ = ...

c) Mốt: $M_0$ = ...

d) Số trung vị: $M_e$ = ...

• ***Người ta đã tiến hành thăm dò nhu cầu của khách hàng về các mẫu thử 1, 2, 3, 4, 5 của một loại sản phẩm mới được sản xuất ra ở một nhà máy M. Dưới đây là bảng phân phối thực nghiệm tần số theo số phiếu tín nhiệm dành cho các mẫu kể trên.***

*(Dùng cho câu 6, 7)*

| Mẫu thử $x_i$ | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | 2100 | 1860 | 1950 | 2000 | ... | 10000 |

**6.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... của cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Tần suất của mẫu thử thứ nhất: ... | A) 21% |
| b) Tần suất của mẫu thử thứ hai: ... | B) 20% |
| c) Tần suất của mẫu thử thứ ba: ... | C) 18,6% |
| d) Tần suất của mẫu thử thứ tư: . . | D) 19,5% |

**7.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) Số các số liệu thống kê: n = ...

b) Tần số của mẫu thứ năm: $n_5 = ...$

c) Tần suất của mẫu thử thứ năm: $f_5 = ...$

d) Mốt của bảng phân phối thực nghiệm: $M_0 = ...$

**8.** Các giá trị xuất hiện nhiều nhất trong một mẫu số liệu được gọi là:

| Khẳng định | Đ | S |
|---|---|---|
| a) Mốt | | |
| b) Số trung bình cộng | | |
| c) Số trung vị | | |
| d) Độ lệch chuẩn | | |

Hãy đánh dấu "x" vào ô đúng sai tương ứng với các khẳng định trên.

• ***Cho bảng phân phối thực nghiệm tần số rời rạc***

*(Dùng cho câu 9 và 10)*

Chiều cao của n cây lim

| Chiều cao $x_i\ (cm)$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | ... | $x_n$ | Cộng |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Tần số $n_i$ | $n_1$ | $n_2$ | $n_3$ | ... | $n_n$ | n |

Với $\overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i^2$; $\quad \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} n_i x_i$.

**9.** Hãy lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Số trung bình cộng của các số liệu thống kê là: ... | A) $s_x^2 = \overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2$ |
| b) Phương sai: ... | B) $s_x = \sqrt{\overline{x^2} - \left(\bar{x}\right)^2}$ |
| c) Độ lệch chuẩn: ... | C) $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} n_i x_i$ |
| d) Hệ số biến thiên: ... | D) $v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.100\%$ |

**10.** Với $f_i = \frac{n_i}{n}$. Hãy lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một kết quả đúng.



| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) Số trung bình cộng của các số liệu thống kê: ... | A) $s_x^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i \left(x_i - \bar{x}\right)^2$ |
| b) Phương sai: ... | B) $s_x = \sqrt{s_x^2}$. |
| c) Độ lệch chuẩn: ... | C) $v_x = \frac{s_x}{\bar{x}}.100\%$. |
| d) Hệ số biến thiên: ... | D) $\bar{x} = \sum_{i=1}^{n} f_i x_i$. |

❀❀❀

# ĐÁP ÁN

| Đề \ Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 25 | b | a | c | d | c | d | b | a | c | c |
| 26 | c | d | b | b | a | b | d | b | b | c |
| 27 | d | c | a | d | c | a | a | d | c | d |
| 28 | c | d | d | a | b | c | c | c | d | a |

**ĐỀ 29**

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | 15 | Đ | 7 | B | 50 | A | 10 000 | Đ | C | D |
| b | 25 | Đ | 6 | C | 11,66 | C | 2090 | S | A | A |
| c | 20% | S | ≈12,57 | D | 11,5 | D | 20,9% | S | B | B |
| d | 50 | Đ | ≈3,55 | A | 12 | B | Mẫu thử số 1 | S | D | C |

# CHƯƠNG VI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## §1. GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

### A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

**I. Độ và Radian**

**1. *Radian***

*Cung có độ dài bằng bán kính là cung có số đo 1 rad.*

**2. *Quan hệ giữa độ và radian***

• Công thức đổi đơn vị:

$$\boxed{\frac{a^0}{180^0} = \frac{\alpha(rad)}{\pi}}$$

• Bảng tương ứng thông dụng:

| Độ | $30^0$ | $45^0$ | $60^0$ | $90^0$ | $120^0$ | $135^0$ | $150^0$ | $180^0$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Radian | $\frac{\pi}{6}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{2\pi}{3}$ | $\frac{3\pi}{4}$ | $\frac{5\pi}{6}$ | $\pi$ |

**3. *Độ dài của một cung tròn***

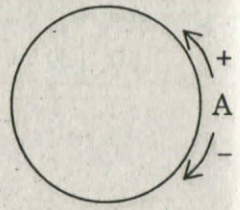
Cung $\alpha(rad)$ của đường tròn bán kính R có độ dài:

$$\boxed{l = R\alpha}$$

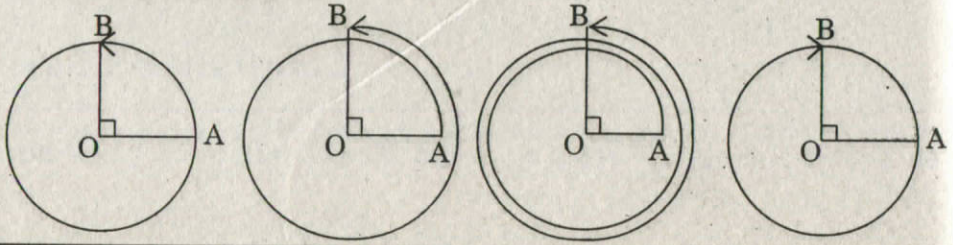
**II. Đường tròn lượng giác**

**1. *Đường tròn định hướng***

Đường tròn định hướng là một đường tròn trên đó ta đã chọn một chiều chuyển động gọi là *chiều dương*, chiều ngược lại là *chiều âm*. Ta quy ước chọn chiều ngược với chiều quay của kim đồng hồ làm chiều dương.




**2. *Cung lượng giác***






Hình trên cho ta hình ảnh của bốn cung lượng giác khác nhau có cùng điểm đầu A, điểm cuối B.

Ta có thể hình dung, một điểm M di động trên đường tròn từ A đến B theo chiều ngược chiều kim đồng hồ tạo nên cung hình a) nếu nó dừng lại ngay khi gặp B lần đầu, tạo nên cung hình b) nếu nó dừng lại sau khi quay một vòng rồi đi tiếp gặp B lần thứ hai...

Khi M di động theo chiều ngược lại, nó tạo nên cung hình d) nếu nó dừng lại khi gặp B lần đầu.

Vậy với hai điểm A, B đã cho trên đường tròn ta có vô số cung lượng giác với điểm đầu A, điểm cuối B, kí hiệu chung là $\overrightarrow{AB}$

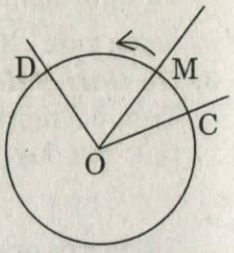
**** Cần lưu ý***

Trên một đường tròn định hướng, lấy hai điểm A và B thì

- ❖ Cung hình học $\overset{\frown}{AB}$ (cung lớn hoặc cung bé) được xác định hoàn toàn.
- ❖ Cung lượng giác $\overrightarrow{AB}$ được xác định dài (đại số) của nó.

**3. *Góc lượng giác***

Trên đường tròn định hướng cho cung lượng giác $\overrightarrow{CD}$. Một điểm M chuyển động trên đường tròn từ C tới D tạo nên cung lượng giác $\overrightarrow{CD}$ nói trên. Khi đó tia OM quay xung quanh gốc O từ vị trí OC tới vị trí OD. Ta nói tia OM tạo ta một *góc lượng giác*, có tia đầu là OC, tia cuối là OD. Kí hiệu góc lượng giác đó là (OC, OD).



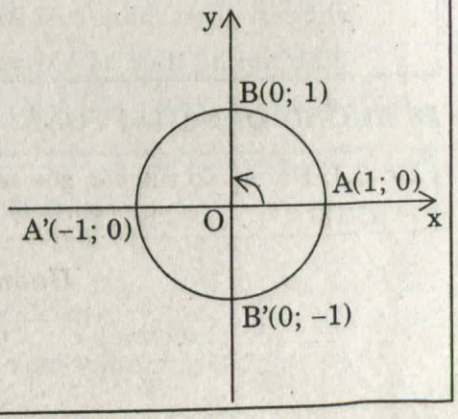

Mỗi cung lượng giác ứng với một góc lượng giác và ngược lại.

**4. *Đường tròn lượng giác***

Trong mặt phẳng tọa độ Oxy vẽ đường tròn định hướng tâm O bán kính R = 1.

Đường tròn này cắt hai trục tọa độ tại bốn điểm A(1 ; 0), A'(–1 ; 0), B(0 ; 1), B'(0 ; –1).

Ta lấy A(1 ; 0) làm điểm gốc của các cung lượng giác. Đường tròn xác định như trên được gọi là *đường tròn lượng giác*.



## III. Số đo của cung và góc lượng giác

### 1. *Số đo của một cung lượng giác*

**** Ghi nhớ***

Số đo của các cung lượng giác có cùng điểm đầu và điểm cuối sai khác nhau một bội của $2\pi$.

Ta viết:

$$\boxed{\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \alpha + k2\pi, k \in Z}$$

trong đó $\alpha$ là số đo của một cung lượng giác tùy ý có điểm đầu là A và điểm cuối là M.

Khi điểm cuối M trùng với điểm đầu A ta viết:

$$\text{sđ}\overset{\frown}{AA} = k2\pi. k \in Z$$

Người ta cũng viết số đo bằng độ. Công thức tổng quát của số đo bằng độ của các cung lượng giác $\overset{\frown}{AM}$ là:

$$\boxed{\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = a^0 + k360^0, k \in Z}$$

### 2. *Số đo của một góc lượng giác*

Ta định nghĩa số đo của góc lượng giác (OA, OC) là số đo cung lượng giác $\overset{\frown}{AC}$ tương ứng.

### 3. *Hệ thức Salơ*

Trên đường tròn lượng giác cho ba điểm tùy ý M, N, P. Ta có hệ thức sau đây, gọi là hệ thức Sa – lơ, cho các cung lượng giác:

$$\text{sđ}\overset{\frown}{MN} + \text{sđ}\overset{\frown}{NP} = \text{sđ}\overset{\frown}{MP} + k2\pi, k \in Z$$

Từ đó suy ra: $\text{sđ}\overset{\frown}{NP} = \text{sđ}\overset{\frown}{MP} - \text{sđ}\overset{\frown}{MN} + k2\pi, k \in Z$

(Trong các kết quả, đôi khi ta không ghi $k \in Z$ nếu điều này là hiển nhiên, không gây hiểu lầm).

### 4. *Biểu diễn cung lượng giác trên đường tròn lượng giác*

Vì đã chọn điểm A(1 ; 0) làm điểm đầu của cung, nên để biểu diễn cung lượng giác có số đo $\alpha$ trên đường tròn lượng giác ta chỉ cần chọn điểm cuối M của cung này. Điểm cuối M được xác định bởi hệ thức $\text{sđ}\overset{\frown}{AM} = \alpha$.

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 6.1:** Đổi số đo của các góc sau ra radian.

a) $18^0$ b) $15^0$ c) $-36^0$ d) $75^0$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\dfrac{a^0}{180^0} = \dfrac{\alpha(rad)}{\pi} \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi a}{180}$.



a) $a^0 = 18^0 \Rightarrow \alpha = \dfrac{\pi.18}{180} = \dfrac{\pi}{10}$. b) $\alpha = \dfrac{\pi}{12}$.

Vậy: $\alpha = \dfrac{\pi}{10}$.

c) $\alpha = -\dfrac{\pi}{5}$. d) $\alpha = \dfrac{5\pi}{12}$.

**Đề 6.2:** Đổi số đo của các cung sau ra độ, phút, giây.

a) $\dfrac{\pi}{18}$ b) $\dfrac{3\pi}{7}$ c) 2,3 d) 4,2.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $a^0 = \dfrac{\alpha}{\pi}.180^0$.

a) Với $\alpha = \dfrac{\pi}{18}$, ta có: $a^0 = 10^0$; b) $a^0 = 77^0 8'34"$.

c) $a^0 = 131^0 46'49"$ ; d) $a^0 = 240^0 38'32"$.

**Đề 6.3:** Một đường tròn có bán kính 20cm. Tìm độ dài các cung trên đường tròn có số đo.

a) $\dfrac{\pi}{15}$ b) 1,5 c) $37^0$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $l = R\pi = 20.\dfrac{\pi}{15} = 4,18cm$.

b) l = 30cm.

c) l = 12,9cm.

**Đề 6.4:** Một bánh xe có bán kính R = 2,2cm quay một góc bằng $30^0 30'$. Tính độ dài đường đi của một điểm trên vành bánh xe.

***Hướng dẫn giải***

Ta có $30^0 30'$ ứng với 0,532 radian.

Theo công thức $l = R.\alpha = 2,2.0,532 \approx 1,2(m)$.

Vậy một điểm trên vành bánh xe đi được một đoạn là 1,2m.

**Đề 6.5:** Bánh xe máy có đường kính (kể cả lốp xe) 55cm. Nếu xe chạy với vận tốc 40km/h thì trong 1 giây bánh xe quay được bao nhiêu vòng.

***Hướng dẫn giải***

Chu vi bánh xe: $c = 2\pi R = 2\pi.\frac{55}{2} = 55\pi(cm)$.

Một giây xe chạy được: $\frac{40}{3600}km = \frac{1}{90}.10^5(cm)$.

Vậy bánh xe đã quay được: $\frac{1}{90}.10^5 : 55\pi = 6,4$ vòng.

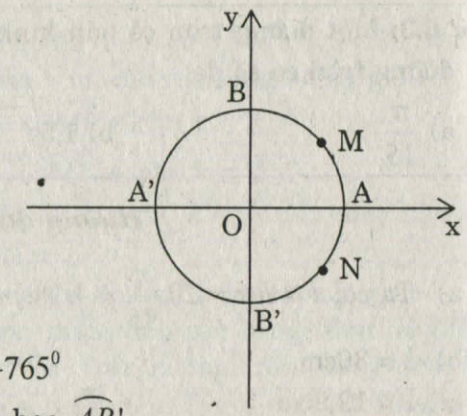
**Đề 6.6:** Biểu diễn trên đường tròn lượng giác các cung lượng giác có số đo tương ứng là:

a) $\frac{25\pi}{4}$ b) $-765^0$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\frac{25\pi}{4} = \frac{\pi}{4} + 3.2\pi$.

Vậy điểm cuối M của cung $\frac{25\pi}{4}$ là trung điểm của cung hình học $\overset{\frown}{AB}$.




b) $-765^0 = -45^0 + (-2).360^0$.

Vậy điểm cuối N của cung $-765^0$ là trung điểm của cung hình học $\overset{\frown}{AB'}$.

**Đề 6.7:** Trên đường tròn lượng giác, hãy xác định các điểm M, biết rằng cung $\overset{\frown}{AM}$ có số đo là:

a) $k\pi$ b) $k\frac{\pi}{2}$ c) $k\frac{\pi}{3}, k \in Z$.

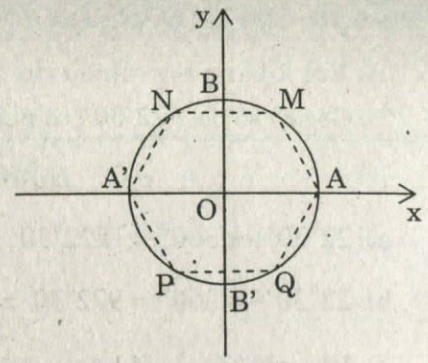
***Hướng dẫn giải***

a) $M \equiv A$ nếu k chẵn.
$M \equiv A'$ nếu k lẻ.



b) $M \equiv A$ nếu $k = 4n \ (n \in Z)$
$M \equiv B$ nếu $k = 4n + 1 \ (n \in Z)$
$M \equiv A'$ nếu $k = 4n + 2 \ (n \in Z)$
$M \equiv B'$ nếu $k = 4n + 3 \ (n \in Z)$

c) Các điểm M lần lượt là các đỉnh của lục giác đều AMNA'PQ.




**Đề 6.8:** Tìm số x, $0 \le x < 2\pi$ và số tự nhiên k sao cho $a = x + k2\pi$ trong các trường hợp

a) $a = 9,7\pi$; b) $a = \frac{8\pi}{3}$; c) $a = \frac{11\pi}{2}$; d) $a = \frac{19\pi}{4}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $a = 9,7\pi = 1,7\pi + 4.2\pi = \frac{17\pi}{10} + 4.2\pi$

Vậy: $x = \frac{17\pi}{10}$ và k = 4.

b) $x = \frac{2\pi}{3}$ và k = 1.

c) $x = \frac{3\pi}{2}$ và k = 2.

d) $x = \frac{3\pi}{4}$ và k = 2.

**Đề 6.9:** Trên đường tròn lượng giác cho điểm M xác định bởi $sđ\overset{\frown}{AM} = \alpha\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$.

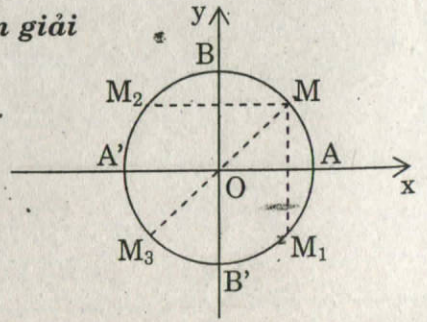
Gọi $M_1, M_2, M_3$ lần lượt là điểm đối xứng của M qua trục Ox, trục Oy và gốc tọa độ O. Tìm số đo của các cung $\overset{\frown}{AM_1}$, $\overset{\frown}{AM_2}$, $\overset{\frown}{AM_3}$.

***Hướng dẫn giải***

$sđ\overset{\frown}{AM_1} = -\alpha + k2\pi (k \in Z)$

$sđ\overset{\frown}{AM_2} = \pi - \alpha + k2\pi (k \in Z)$

$sđ\overset{\frown}{AM_3} = \pi + \alpha = k2\pi (k \in Z)$



**Đề 6.10:** Cho $\text{sđ}(OA,OB) = 20^0 30' + k360^0, k \in Z$.

a) Với k bằng bao nhiêu thì sđ(OA, OB) bằng $1822^0 30'$?

b) Góc có số đo $972^0 30'$ có phải là một trong các góc (OA, OB) không?

***Hướng dẫn giải***

a) $22^0 30' + k.360^0 = 1822^0 30' \Rightarrow k = 5 \in Z$.

b) $22^0 30' + k.360^0 = 972^0 30' \Rightarrow k = \dfrac{950}{360} \notin Z$.

Vậy giá trị này không phải là số đo (OA, OB).

**Đề 6.11:** Cho $\text{sđ}(OA,OB) = 22^0 30' + k.360 (k \in Z)$.

Tìm k để $-420^0 < \text{sđ}(OA,OB) < 800^0$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $-420^0 < 22^0 30' + k.360^0 < 800^0 54z$

$\Leftrightarrow -442^0 30' < k360^0 < 777^0 30'$

$\Leftrightarrow k = -1,\ k = 0,\ k = 2.$

**Đề 6.12:** Tìm giá trị tổng quát của góc (OA, OB) biết một số đo của góc (OA, OB) bằng: $\dfrac{3\pi}{2} + 5\pi$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $(OA,OB) = \dfrac{3\pi}{2} + 5\pi = \dfrac{\pi}{2} + 3.2\pi$

Vậy: $\text{sđ}(OA,OB) = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi, k \in Z$.

*
**



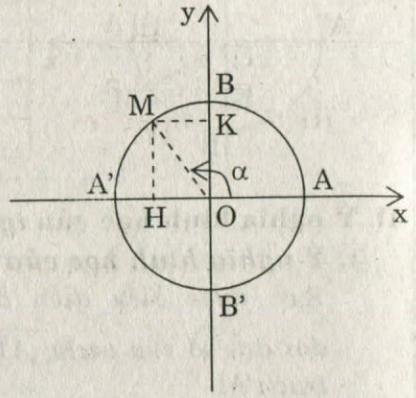
# §2. CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Các giá trị lượng giác của cung $\alpha$

**1. *Định nghĩa***

Trên đường tròn lượng giác cho cung $\overset{\frown}{AM}$ có $sđ\overset{\frown}{AM} = \alpha$.




- Tung độ y của điểm M gọi là sin của $\alpha$ và kí hiệu là $\sin\alpha$.
- Hoành độ x của điểm M gọi là cos*in* của $\alpha$ và kí hiệu là $\cos\alpha$.
- Nếu $\cos\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ gọi là tang của $\alpha$ và kí hiệu là $tg\alpha$ (hay $\tan\alpha$):

$$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}.$$

- Nếu $\sin\alpha \neq 0$, tỉ số $\dfrac{\cos\alpha}{\sin\alpha}$ gọi là cotang của $\alpha$ và kí hiệu là $\cot g\alpha$ (hay $\cot\alpha$):

$$\cot g\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}.$$

Các giá trị $\sin\alpha$, $\cos\alpha$, $tg\alpha$, $\cot g\alpha$ được gọi là các *giá trị lượng giác* của cung $\alpha$.

Ta cũng gọi trục tung là *trục sin*, còn trục hoành là *trục cosin*.

**** Chú ý***

1. Các định nghĩa trên cũng áp dụng cho các góc lượng giác.
2. Nếu $0^0 \leq \alpha \leq 180^0$ thì các giá trị lượng giác của $\alpha$ chính là các tỉ số lượng giác của góc đó.

**2. *Các hệ quả của định nghĩa***

a) $\sin(\alpha + k2\pi) = \sin\alpha \quad (k \in Z)$.

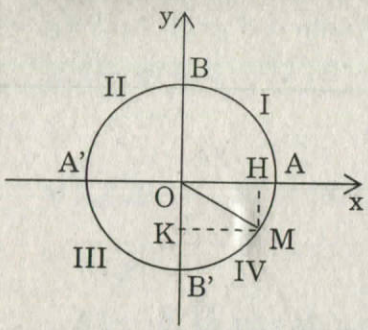
$\cos(\alpha + k2\pi) = \cos\alpha \quad (k \in Z)$.

b) $-1 \leq \sin\alpha \leq 1; \quad -1 \leq \cos\alpha \leq 1$.

c) $tg\alpha$ không xác định khi $\alpha = \dfrac{\pi}{2} + k\pi \quad (k \in Z)$.

d) $\cot g\alpha$ không xác định khi $\alpha = k\pi \quad (k \in Z)$.

• Bảng xác định dấu của các giá trị lượng giác:



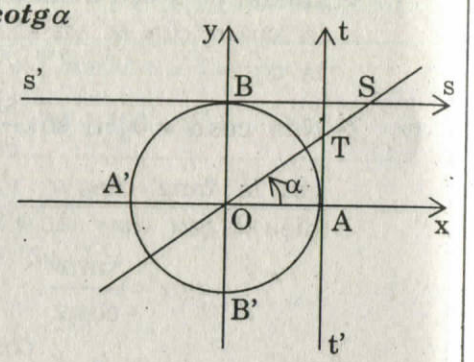

| Giá trị lượng giác \ Phần tư | I | II | III | IV |
|---|---|---|---|---|
| $\cos\alpha$ | + | − | − | + |
| $\sin\alpha$ | + | + | − | − |
| $tg\alpha$ | + | − | + | − |
| $\cot g\alpha$ | + | − | + | − |

## II. Ý nghĩa hình học của $tg\alpha$ và $\cot g\alpha$

### 1. *Ý nghĩa hình học của $tg\alpha$*

*$tg\alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overline{AT}$ trên trục t'At.*

Trục t'At được gọi là trục tang.




Như vậy: $\boxed{tg\alpha = \overline{AT}}$

### 2. *Ý nghĩa hình học của $\cot g\alpha$*

*$\cot g\alpha$ được biểu diễn bởi độ dài đại số của vectơ $\overline{BS}$ trên trục s'Bs.*

Trục s'Bs được gọi là trục cotang.

Như vậy: $\boxed{\cot g\alpha = \overline{BS}}$

## III. Quan hệ giữa các giá trị lượng giác

### 1. *Các hằng đẳng thức lượng giác cơ bản*

$$\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$$

$$1 + tg^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \qquad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in Z$$

$$1 + \cot g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \qquad \alpha \neq k\pi, k \in Z$$

$$tg\alpha.\cot g\alpha = 1, \qquad \alpha \neq \frac{k\pi}{2}, k \in Z$$

### 2. *Giá trị lượng giác của các cung có liên quan đặc biệt*

a) *Cung đối nhau:* $\alpha$ và $(-\alpha)$.

Các điểm cuối của hai cung $\alpha$ và $(-\alpha)$ đối xứng nhau qua trục hoành, nên ta có



$$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$$
$$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$$
$$tg(-\alpha) = -tg\alpha$$
$$\cot g(-\alpha) = -\cot g\alpha$$

b) *Cung bù nhau:* $\alpha$ và $(\pi - \alpha)$.

Các điểm cuối của hai cung $\alpha$ và $(\pi - \alpha)$ đối xứng nhau qua trục tung, nên ta có:

$$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$$
$$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$$
$$tg(\pi - \alpha) = -tg\alpha$$
$$\cot g(\pi - \alpha) = -\cot g\alpha$$

c) *Cung hơn kém $\pi$ :* $\alpha$ và $(\pi + \alpha)$.

Các điểm cuối của hai cung $\alpha$ và $(\pi + \alpha)$ đối xứng nhau qua gốc tọa độ O, nên ta có:

$$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$$
$$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$$
$$tg(\alpha + \pi) = tg\alpha$$
$$\cot g(\alpha + \pi) = \cot g\alpha$$

d) *Cung phụ nhau:* $\alpha$ và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$.

Các điểm cuối của hai cung $\alpha$ và $\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right)$ đối xứng nhau qua phân giác d của góc xOy, nên ta có:

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$$
$$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$$
$$tg\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cot g\alpha$$
$$\cot g\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = t g\alpha$$

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 6.13:** Đơn giản các biểu thức:

a) $E=\cos^2 a+\cos^2 a.\cot g^2 a$

b) $F=\sin^2 a+\sin^2 a tg^2 a$

c) $G=\dfrac{2\cos^2 a-1}{\sin a+\cos a}$

d) $H=\sqrt{\sin^2 a(1+\cot ga)+\cos^2 a(1+tga)}$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $E=\cos^2 a(1+\cot g^2 a)=\cos^2 a.\dfrac{1}{\sin^2 a}=\cot g^2 a$.

b) $F=\sin^2 a(1+\mathrm{t}g^2 a)=\sin^2 a.\dfrac{1}{\cos^2 a}=\mathrm{t}g^2 a$.

c) $G=\dfrac{2\cos^2 a-\cos^2 a-\sin^2 a}{\sin a+\cos a}=\dfrac{\cos^2 a-\sin^2 a}{\cos a+\sin a}=\cos a-\sin a$.

d) Đáp số: $H=|\sin a+\cos a|$.

**Đề 6.14:** Chứng minh các đẳng thức:

a) $tg^2 x-\sin^2 x=tg^2 x.\sin^2 x$

b) $\dfrac{tgx}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cot gx}=\cos x$.

c) $\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=1+2tg^2 x$

d) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cot g^2 x-tg^2 x}=\sin^2 x\cos^2 x$.

***Hướng dẫn giải***

a) $tg^2 x-\sin^2 x=\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}-\sin^2 x=\sin^2 x\left(\dfrac{1}{\cos^2 x}-1\right)$

$=\sin^2 x\dfrac{1-\cos^2 x}{\cos^2 x}=\sin^2 x.tg^2 x$.

b) $\dfrac{tgx}{\sin x}-\dfrac{\sin x}{\cot gx}=\dfrac{1}{\sin x}.\dfrac{\sin x}{\cos x}-\sin x.\dfrac{\sin x}{\cos x}=\dfrac{1}{\cos x}(1-\sin^2 x)$

$=\dfrac{1}{\cos x}.\cos^2 x=\cos x$.

c) $\dfrac{1+\sin^2 x}{1-\sin^2 x}=\dfrac{\cos^2 x+\sin^2 x+\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+\dfrac{2\sin^2 x}{\cos^2 x}=1+2tg^2 x$.



d) $\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cot g^2 x-tg^2 x}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\dfrac{\cos^2 x}{\sin^2 x}-\dfrac{\sin^2 x}{\cos^2 x}}=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{\cos^4 x-\sin^4 x}.\sin^2 x\cos^2 x$

$=\dfrac{\cos^2 x-\sin^2 x}{(\cos^2 x-\sin^2 x)(\cos^2 x+\sin^2 x)}.\sin^2 x\cos^2 x$

$=\sin^2 x\cos^2 x$.

**Đề 6.15:** Chứng minh các đẳng thức:

a) $\dfrac{\cos a}{1+\sin a}+tga=\dfrac{1}{\cos a}$

b) $\dfrac{\sin a}{1+\cos a}+\dfrac{1+\cos a}{\sin a}=\dfrac{2}{\sin a}$

c) $\dfrac{tga}{1-tg^2 a}.\dfrac{\cot g^2 a-1}{\cot ga}=1$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\dfrac{\cos a}{1+\sin a}+tga=\dfrac{\cos a}{1+\sin a}+\dfrac{\sin a}{\cos a}=\dfrac{\cos^2 a+\sin a+\sin^2 a}{(1+\sin a)\cos a}$

$=\dfrac{1+\sin a}{(1+\sin a)\cos a}=\dfrac{1}{\cos a}$.

Câu b) và c) *học sinh tự làm.*

**Đề 6.16:**

a) Cho $\cos a=\dfrac{4}{5}(270^0<a<360^0)$. Tính $\sin a, tga, \cot ga$.

b) Cho $\sin a=\dfrac{5}{13}\left(\dfrac{\pi}{2}<a<\pi\right)$. Tính $\cos a, tga, \cot ga$.

c) Cho $tga=3\left(\pi<a<\dfrac{3\pi}{2}\right)$. Tính $\sin a, \cos a, \cot ga$.

d) Cho $\cot g15^0=2+\sqrt{3}$. Tính $\sin 15^0, \cos 15^0, tg15^0$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\sin^2 a=1-\cos^2 a=1-\dfrac{16}{25}=\dfrac{9}{25}$

$\sin a=\pm\dfrac{3}{5}$

Vì $270^0<a<360^0$, nên sina < 0

Do đó: $\sin a = -\frac{3}{5}$

* $tga = \frac{\sin a}{\cos a} = \frac{-\frac{3}{5}}{\frac{4}{5}} = -\frac{3}{4}$

* $\cot ga = \frac{1}{tga} = -\frac{4}{3}$.

b) Đáp số: $\cos a = -\frac{12}{13}, tga = -\frac{5}{12}, \cot ga = -\frac{12}{5}$.

c) $\frac{1}{\cos^2 a} = 1 + tg^2 a = 1 + 9 = 10$

$\cos a = \pm\frac{1}{\sqrt{10}}$

Vì $\pi < a < \frac{3\pi}{2}$ nên $\cos a < 0$

Vậy $\cos a = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

* $\sin a = tga.\cos a = 3.\left(-\frac{1}{\sqrt{10}}\right) = -\frac{3}{\sqrt{10}}$

* $\cot ga = \frac{1}{tga} = \frac{1}{3}$.

d) Đáp số: $\cos 15^0 = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$; $\sin 15^0 = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{3}}{4}$; $tg15^0 = 2-\sqrt{3}$.

**Đề 6.17:** Tính giá trị các biểu thức:

a) $E = \frac{\cot ga + tga}{\cot ga - tga}$, biết $\sin a = \frac{3}{5}$ và $0 < a < \frac{\pi}{2}$.

b) $F = \frac{\sin a + \cos a}{\cos a - \sin a}$, biết $tga = 5$.

c) $G = \frac{\sin^2 a + 2\sin a\cos a - 2\cos^2 a}{2\sin^2 a - 3\sin a\cos a + 4\cos^2 a}$, biết $\cot ga = -3$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta tính $\cot g\alpha$ và $tg\alpha$ theo $\sin\alpha$:

$$1 + \cot g^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha} = \frac{25}{9} \Rightarrow \cot g^2\alpha = \frac{25}{9} - 1 = \frac{16}{9}.$$



Vậy: $\cot g\alpha = \pm\frac{4}{3}$ ; vì $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ nên $\cot g\alpha = \frac{4}{3}; tg\alpha = \frac{3}{4}$.

Từ đó ta tính được: $E = \frac{25}{7}$.

b) Do $tg\alpha = 5$, nên $\cos\alpha \neq 0$. Chia tử số và mẫu số của F cho $\cos\alpha$ ta được:

$$F = \frac{tg\alpha + 1}{1 - tg\alpha} = \frac{5+1}{1-5} = -\frac{3}{2}.$$

c) Do $\cot g\alpha = -3$, nên $\sin\alpha \neq 0$. Chia tử số và mẫu số của G cho $\sin^2\alpha$, ta được:

$$G = \frac{1 + 2\cot g\alpha - 2\cot g^2\alpha}{2 - 3\cot g\alpha + 4\cot g^2\alpha} = \frac{1 - 6 - 18}{2 + 9 + 36} = -\frac{23}{47}$$

**Đề 6.18:** Cho $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$. Xét dấu các biểu thức:

a) $\cos(\alpha + \pi)$ b) $tg(\alpha - \pi)$

c) $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right)$ d) $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right)$

***Hướng dẫn giải***

a) $\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha < 0$.

b) $tg(\alpha - \pi) = tg\alpha > 0$.

c) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow 0 < \alpha + \frac{2\pi}{2} < \frac{\pi}{2} + \frac{2\pi}{5} < \pi$.

Do đó: $\sin\left(\alpha + \frac{2\pi}{5}\right) > 0$.

d) $0 < \alpha < \frac{\pi}{2} \Rightarrow -\frac{\pi}{2} < \alpha - \frac{3\pi}{8} < \frac{\pi}{2}$.

Do đó: $\cos\left(\alpha - \frac{3\pi}{8}\right) > 0$.

**Đề 6.19:** Tính các giá trị lượng giác của cung $\alpha$ biết:

a) $\sin\alpha = \frac{1}{3}$ b) $\cos\alpha = \frac{2}{\sqrt{5}}$ và $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$.

c) $tg\alpha = -2$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ d) $\cot g\alpha = 3$ và $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\cos^2\alpha = 1-\sin^2\alpha = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}; \cos\alpha = \pm\sqrt{\frac{8}{9}} = \frac{\pm 2\sqrt{2}}{3}$

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}; \cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \pm 2\sqrt{2}$.

b) $\sin^2\alpha = 1-\cos^2\alpha = 1-\frac{4}{5} = \frac{1}{5}$. Vì $-\frac{\pi}{2} < \alpha < 0$ nên:

$\sin\alpha < 0$ ; do đó $\sin\alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = \frac{-\sqrt{5}}{5}$.

$tg\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{-1}{2}; \cot g\alpha = -2$.

c) Ta có: $\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1+tg^2\alpha = 1+2^2 = 5$.

Vì $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$ nên $\cos\alpha < 0$.

Do đó: $\cos\alpha = -\sqrt{\frac{1}{5}} = -\frac{1}{\sqrt{5}}$.

$\sin\alpha = tg\alpha.\cos\alpha = -2.\frac{1}{-\sqrt{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}}$

$\cot g\alpha = \frac{1}{tg\alpha} = \frac{-1}{2}$

d) $tg\alpha = \frac{1}{\cot g\alpha} = \frac{1}{3}$.

$\frac{1}{\sin^2\alpha} = 1+\cot g^2\alpha = 1+3^2 = 10$.

Vì $\pi < \alpha < \frac{3\pi}{2}$ nên $\sin\alpha < 0$

Do đó: $\sin\alpha = -\frac{1}{\sqrt{10}}$

$\cos\alpha = \sin\alpha.\cot g\alpha = \frac{-3}{\sqrt{10}}$.



**Đề 6.20:** Tính các hàm số lượng giác của các góc:

a) $150^0$ b) $9\pi$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\cos 150^0 = \cos(180^0 - 30^0) = -\cos 30^0 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

$\sin 150^0 = \sin(180^0 - 30^0) = \sin 30^0 = \frac{1}{2}$

$tg150^0 = \frac{\sin 150^0}{\cos 150^0} = \frac{\frac{1}{2}}{-\frac{\sqrt{3}}{2}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$

$\cot g150^0 = \frac{1}{tg150^0} = -\sqrt{3}$

b) $\cos 9\pi = \cos(\pi + 4.2\pi) = \cos\pi = -1$

$\sin 9\pi = \sin(\pi + 4.2\pi) = \sin\pi = 0$

$tg9\pi = 0$

$\cot g9\pi$ không xác định.

**Đề 6.21:** Rút gọn các biểu thức sau:

a) $A = \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \cos(2\pi - x) + \cos(3\pi + x)$.

b) $B = 2\cos x - 3\cos(\pi - x) + 5\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) + \cot g\left(\frac{3\pi}{2} - x\right)$.

c) $C = 2\sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right) + \sin(5\pi - x) + \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) + \cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)$.

d) $D = \cos(5\pi - x) - \sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right) + tg\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) + \cot g(3\pi - x)$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right) = \cos\left[\pi - \left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right] = -\cos\left[-\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right]$

$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\sin x$.

$\cos(2\pi - x) = \cos(-x) = \cos x$

$\cos(3\pi + x) = \cos(\pi + x + 2\pi) = \cos(\pi + x) = -\cos x$

Thay vào biểu thức của A ta được: A = -sinx.

b) Ta có: $\cos(\pi - x) = -\cos(-x) = -\cos x$

$$\sin\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) = \sin\left(\pi + \left(\frac{\pi}{2} - x\right) + 2\pi\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{2} - x\right)$$

$$= -\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -\cos x$$

$$\cot g\left(\frac{3\pi}{2} - x\right) = \cot g\left(\frac{\pi}{2} - x + \pi\right) = -\cot g\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = -tgx.$$

Thay vào biểu thức của B ta được: B = –tgx.

c) Đáp số: C = cosx ; d) D = 0.

**Đề 6.22:** Chứng minh rằng trong tam giác ABC ta có:

a) $\sin(A+B) = \sin C$ b) $\cos(A+B) = -\cos C$

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \cos\frac{C}{2}$ d) $\cos\frac{A+B}{2} = \sin\frac{C}{2}$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $A + B + C = \pi \Rightarrow A + B = \pi - C$.

$\sin(A+B) = \sin(\pi - C) = \sin C$.

b) $\cos(A+B) = \cos(\pi - C) = -\cos C$.

c) $\sin\frac{A+B}{2} = \sin\frac{\pi - C}{2} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \cos\frac{C}{2}$.

d) $\cos\frac{A+B}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{C}{2}\right) = \sin\frac{C}{2}$.

**Đề 6.23:** Chứng minh các biểu thức sau không phụ thuộc x:

a) $A = 2\cos^4 x - \sin^4 x + \sin^2 x\cos^2 x + 3\sin^2 x$.

b) $B = (\cot gx + tgx)^2 - (\cot gx - tgx)^2$.

c) $C = \frac{2}{tgx - 1} + \frac{\cot gx + 1}{\cot gx - 1}$.

d) $D = \sqrt{\sin^4 x + 4\cos^2 x} + \sqrt{\cos^4 x + 4\sin^2 x}$.



***Hướng dẫn giải***

a) $A = 2\cos^4 x - (1 - \cos^2 x)^2 + (1 - \cos^2 x)\cos^2 x + 3(1 - \cos^2 x)$

$= 2\cos^4 x - [1 - 2\cos^2 x + \cos^4 x] + \cos^2 x - \cos^4 x + 3 - 3\cos^2 x = 2$

Vậy A không phụ thuộc x.

b) Hướng dẫn: $B = 4\cot gx tgx = 4$.

c) $C = \frac{2}{\frac{\sin x}{\cos x} - 1} + \frac{\frac{\cos x}{\sin x} + 1}{\frac{\cos x}{\sin x} - 1} = \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x} + \frac{\cos x + \sin x}{\cos x - \sin x}$.

$= \frac{2\cos x}{\sin x - \cos x} - \frac{\cos x + \sin x}{\sin x - \cos x} = \frac{\cos x - \sin x}{\sin x - \cos x} = -1$.

Vậy C không phụ thuộc x.

d) $D = \sqrt{\sin^4 x + 4(1 - \sin^2 x)} + \sqrt{\cos^4 x + 4(1 - \cos^2 x)}$.

$= \sqrt{\sin^4 x - 4\sin^2 x + 4} + \sqrt{\cos^4 x - 4\cos^2 x + 4}$

$= \sqrt{(\sin^2 x - 2)^2} + \sqrt{(\cos^2 x - 2)^2}$

$= |\sin^2 x - 2| + |\cos^2 x - 2| = 2 - \sin^2 x + 2 - \cos^2 x = 3$

Vậy D không phụ thuộc x.

**Đề 6.24:** Chứng minh rằng các biểu thức sau đây không phụ thuộc vào x.

a) $E = 3(\sin^8 x - \cos^8 x) + 4(\cos^6 x - 2\sin^6 x) + 6\sin^4 x$.

b) $F = 2(\sin^4 x + \cos^4 x + \sin^2 x.\cos^2 x)^2 - (\sin^8 x + \cos^8 x)$.

***Hướng dẫn giải***

a) Đặt $u = \cos^2 .x$, khi đó $\sin^2 x = 1 - u$

$\sin^8 x - \cos^8 x = (1-u)^4 - u^4 = 1 - 4u + 6u^2 - 4u^3 + u^4 - u^4$

$= 1 - 4u + 6u^2 - 4u^3$

$\cos^6 x - 2\sin^6 x = u^3 - 2(1-u)^3 = -2 + 6u - 6u^2 + 3u^3$

$\sin^4 x = (1-u)^2 = 1 - 2u + u^2$.

Vậy: $E = 3(1 - 4u + 6u^2 - 4u^3) + 4(-2 + 6u - 6u^2 + 3u^3) + 6(1 - 2u + u^2) = 1$

Tức là E không phụ thuộc x.

b) $\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 .x\cos^2 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-\sin^2 x\cos^2 x$

$=1-\sin^2 x\cos^2 x$

$\left(\sin^4 x+\cos^4 x+\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2=1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x\cos^4 x$

$\sin^8 x+\cos^8 x=\left(\sin^4 x+\cos^4 x\right)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x\right)^2-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+4\sin^4\cos^4 x-2\sin^4 x\cos^4 x$

$=1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x$

$F=2\left(1-2\sin^2 x\cos^2 x+\sin^4 x\right)-\left(1-4\sin^2 x\cos^2 x+2\sin^4 x\cos^4 x\right)=1$

Vậy F không phụ thuộc x .

*
* *

# §3. CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

## A. TÓM TẮT LÍ THUYẾT

### I. Công thức cộng

1. $\cos(a+b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$
2. $\cos(a-b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$
3. $\sin(a+b)=\sin a.\cos b+\cos a.\sin b$
4. $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos a.\sin b$
5. $tg(a+b)=\dfrac{tga+tgb}{1-tga.tgb}$
6. $tg(a-b)=\dfrac{tga-tgb}{1+tga.tgb}$

### II. Công thức nhân đôi

#### 1. *Công thức nhân đôi*

1. $\sin 2a=2\sin a.\cos a$
2. $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 x-1=1-2\sin^2 a$
3. $tg2a=\dfrac{2tga}{1-tg^2 a}$



#### 2. *Công thức hạ bậc*

1. $\cos^2 a=\dfrac{1+\cos 2a}{2}$
2. $\sin^2 a=\dfrac{1-\cos 2a}{2}$

### III. Công thức tính *sinx, cosx, tgx,* theo $t = tg\dfrac{x}{2}$

Với $x\neq\pi+k2\pi(k\in\pi)$. Đặt $t=tg\dfrac{x}{2}$ ta có:

1. $\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}.$
2. $\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}.$
3. $tgx=\dfrac{2t}{1-t^2}.$

## B. HƯỚNG DẪN GIẢI TOÁN

**Đề 6.25:** Chứng minh rằng:

a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

b) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

c) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right).$

d) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}\left(\sin x.\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos x.\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$

$=\sqrt{2}\left(\sin x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\cos x.\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=\sin x+\cos x$

Vậy: $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right).$

b), c), d) Chứng minh tương tự.

* *Ghi chú:*

+ Ở câu a) và c) ta nhận xét: $\sin x+\cos x$ hay $\cos x+\sin x$ đều như nhau. Nhưng ở câu a) ta đưa về theo sin còn ở câu c) ta đưa về theo cos.
+ Học sinh nên thuộc các kết quả này.

**Đề 6.26:** Rút gọn biểu thức: $A=\dfrac{\sin\left(\frac{\pi}{6}+a\right)-\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+a\right)+\cos\left(\frac{\pi}{3}+a\right)}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $A=\dfrac{\sin\frac{\pi}{6}\cos a+\cos\frac{\pi}{6}\sin a-\cos\frac{\pi}{3}\cos a+\sin\frac{\pi}{3}\sin a}{\sin\frac{\pi}{6}\cos a+\cos\frac{\pi}{6}\sin a+\cos\frac{\pi}{3}\cos a-\sin\frac{\pi}{3}\sin a}$

$=\dfrac{\frac{1}{2}\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a-\frac{1}{2}\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a}{\frac{1}{2}\cos a+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a+\frac{1}{2}\cos a-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin a}$

$=\dfrac{\sqrt{3}\sin a}{\cos a}=\sqrt{3}tga.$

**Đề 6.27:** Chứng minh rằng:

- $tg\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\dfrac{1-tga}{1+tga}$;
- $tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=\dfrac{1+tga}{1-tga}$.

***Hướng dẫn giải***

Do $tg\frac{\pi}{4}=1$ nên ta có:

❖ $tg\left(\frac{\pi}{4}-a\right)=\dfrac{tg\frac{\pi}{4}-tga}{1+tg\frac{\pi}{4}.tga}=\dfrac{1-tga}{1+tga}$

❖ $tg\left(\frac{\pi}{4}+a\right)=\dfrac{tg\frac{\pi}{4}+tga}{1-tg\frac{\pi}{4}.tga}=\dfrac{1+tga}{1-tga}$.



**Đề 6.28:** Tính các giá trị lượng giác của các cung có số đo:

a) $15^0$ b) $\dfrac{5\pi}{12}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $15^0=60^0-45^0$, do đó:

❖ $\sin15^0=\sin\left(60^0-45^0\right)=\sin60^0\cos45^0-\cos60^0\sin45^0$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}-1\right)}{4}$.

❖ $\cos15^0=\cos\left(60^0-45^0\right)=\cos60^0\cos45^0+\sin60^0\sin45^0$

$=\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}\left(\sqrt{3}+1\right)}{4}$.

❖ $tg15^0=\dfrac{\sin15^0}{\cos15^0}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}=2-\sqrt{3}$.

b) Ta có: $\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$. Áp dụng công thức cộng ta được.

❖ $\sin\dfrac{5\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{2\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{2\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}-\cos\dfrac{2\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$=\dfrac{\sqrt{3}}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}+\dfrac{1}{2}.\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}+1\right)$.

❖ $\cos\dfrac{5\pi}{12}=\dfrac{\sqrt{2}}{4}\left(\sqrt{3}-1\right)$.

❖ $tg\dfrac{5\pi}{12}=2+\sqrt{3}$.

**Đề 6.29**

a) Biết $\sin\alpha=\dfrac{3}{5}$ và $\dfrac{\pi}{2}<a<\pi$. Tính $tg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{3}\right)$.

b) Biết $\sin a=\dfrac{4}{5}\left(0^0<a<90^0\right),\sin b=\dfrac{8}{17}\left(90^0<b<180^0\right)$.

Tính $\cos(a+b),\sin(a-b)$.

c) Cho hai góc nhọn a và b với $tga=\dfrac{1}{2},tgb=\dfrac{1}{3}$. Tính a + b.

d) Biết $tg\left(\alpha+\dfrac{\pi}{4}\right)=m$ với $m\neq-1$. Tính $tg\alpha$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $\cos^2 a = 1-\sin^2 a = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$.

Vì $\frac{\pi}{2} < a < \pi$ nên $\cos a < 0$, do đó $\cos a = -\sqrt{\frac{16}{25}} = -\frac{4}{5}$.

$$\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right) = \sin a\cos\frac{\pi}{3} + \cos a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{3}{5}.\frac{1}{2} - \frac{4}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3-4\sqrt{3}}{10}$$

$$\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right) = \cos a\cos\frac{\pi}{3} - \sin a\sin\frac{\pi}{3} = \frac{-4}{5}.\frac{1}{2} - \frac{3}{5}.\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{-4-3\sqrt{3}}{10}$$

$$tg\left(a+\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(a+\frac{\pi}{3}\right)}{\cos\left(a+\frac{\pi}{3}\right)} = \frac{4\sqrt{3}-3}{4+3\sqrt{3}} = \frac{48-25\sqrt{3}}{11}.$$

b) $\sin a = \frac{4}{5}$, $0^0 < a < 90^0 \Rightarrow \cos a = \frac{3}{5}$

$$\sin b = \frac{8}{17},\quad 90^0 < b < 180^0 \Rightarrow \cos b = -\sqrt{1-\frac{64}{289}} = \frac{-15}{17}$$

$$\cos(a+b) = \cos a.\cos b - \sin a.\sin b = \frac{3}{5}\left(-\frac{15}{17}\right) - \frac{4}{5}.\frac{8}{17} = -\frac{77}{85}$$

$$\sin(a-b) = \sin a.\cos b - \cos a.\sin b = \frac{4}{5}\left(-\frac{15}{17}\right) - \frac{3}{5}.\frac{8}{17} = -\frac{84}{85}$$

c) Ta có: $tg(a+b) = \frac{tga+tgb}{1-tgatgb} = \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}.\frac{1}{3}} = 1$

Vì a; b là 2 góc nhọn nên : $a+b = \frac{\pi}{4}$.

d) Ta có: $tg\left(a+\frac{\pi}{4}\right) = \frac{tga+tg\frac{\pi}{4}}{1-tgatg\frac{\pi}{4}} = \frac{1+tga}{1-tga} = m \Rightarrow (m+1)tga = m-1$

Vì $m \neq -1 \Rightarrow m+1 \neq 0$, do đó $tga = \frac{m-1}{m+1}$.



**Đề 6.30:** Chứng minh:

a) $\sin(a+b)\sin(a-b) = \sin^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \cos^2 a$.

b) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a - \sin^2 b = \cos^2 b - \sin^2 a$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\sin(a+b)\sin(a-b) = (\sin a.\cos b + \cos a.\sin b)(\sin a.\cos b - \cos a.\sin b)$

$= \sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b$

$= \sin^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\sin^2 a)\sin^2 b$

$= \sin^2 a - \sin^2 b$

Mặt khác tạ có:

$\sin^2 a\cos^2 b - \cos^2 a\sin^2 b = (1-\cos^2 a)\cos^2 b - \cos^2 a(1-\cos^2 b)$

$= \cos^2 b - \cos^2 a$.

Từ đó suy ra đpcm.

b) $\cos(a+b)\cos(a-b) = \cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b$

$= \cos^2 a(1-\sin^2 b) - (1-\cos^2 a)\sin^2 b$

$= \cos^2 a - \sin^2 b$ (5)

Mặt khác ta có:

$\cos^2 a\cos^2 b - \sin^2 a\sin^2 b = (1-\sin^2 a)\cos^2 b - \sin^2 a(1-\cos^2 b)$

$= \cos^2 b - \sin^2 a$

Từ đó suy ra đpcm.

**Đề 6.31**

a) Cho $a-b = \frac{\pi}{3}$. Tính giá trị các biểu thức:

$A = (\cos a + \cos b)^2 + (\sin a + \sin b)^2$.

$B = (\cos a + \sin b)^2 + (\cos b - \sin a)^2$.

b) Cho $\cos a = \frac{1}{3}$ và $\cos b = \frac{1}{4}$. Tính $\cos(a+b)\cos(a-b)$.

***Hướng dẫn giải***

a) $A = (\cos^2 a + \cos^2 b + 2\cos a\cos b) + (\sin^2 a + \sin^2 b + 2\sin a\sin b)$

$= 2 + 2(\cos a.\cos b + \sin a.\sin b) = 2 + 2\cos(a-b)$

$= 2 + 2\cos\frac{\pi}{3} = 3.$

$$B=(\cos^2 a+\sin^2 b+2\cos a\sin b)+(\cos^2 b+\sin^2 a-2\cos b\sin a)$$
$$=2-2(\sin a\cos b-\cos a\sin b)=2-2\sin(a-b)$$
$$=2-\sqrt{3}$$

b) Ta có: $\cos(a+b)\cos(a-b)=\cos^2 a\cos^2 b-\sin^2 a\sin^2 b$

$$=\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)-\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right)\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^2\right)$$
$$=\frac{-199}{144}.$$

**Đề 6.32:** Chứng minh rằng trong tam giác ABC, ta có:

a) $tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$ (với điều kiện tam giác ABC không phải là tam giác vuông).

b) $tg\frac{A}{2}.tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}.tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}.tg\frac{A}{2}=1$.

***Hướng dẫn giải***

a) A, B, C là các góc của một tam giác nên:

$$A+B+C=\pi\Leftrightarrow A+B=\pi-C$$
$$\Rightarrow tg(A+B)=tg(\pi-C)$$
$$\Leftrightarrow\frac{tgA+tgB}{1-tgAtgB}=-tgC$$
$$\Leftrightarrow tgA+tgB+tgC=tgA.tgB.tgC$$

b) Ta có: $\frac{A+B+C}{2}=\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{A+B}{2}=\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}$

Do đó: $tg\left(\frac{A+B}{2}\right)=tg\left(\frac{\pi}{2}-\frac{C}{2}\right)$

$$\Leftrightarrow\frac{tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}}{1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}}=\cot g\frac{C}{2}=\frac{1}{tg\frac{C}{2}}$$
$$\Leftrightarrow tg\frac{C}{2}\left(tg\frac{A}{2}+tg\frac{B}{2}\right)=1-tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}$$
$$\Leftrightarrow tg\frac{A}{2}tg\frac{B}{2}+tg\frac{B}{2}tg\frac{C}{2}+tg\frac{C}{2}tg\frac{A}{2}=1\ \ (\text{đpcm})$$



**Đề 6.33:** Chứng minh: $\sin^4 a+\cos^4 a=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a$.

***Hướng dẫn giải***

Áp dụng hằng đẳng thức: $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, ta được:

$$\sin^4 a+\cos^4 a=(\sin^2 a+\cos^2 a)^2-2\sin^2 a\cos^2 a$$
$$=1-\frac{1}{2}(2\sin a.\cos a)^2=1-\frac{1}{2}\sin^2 2a.$$

**Đề 6.34:** Chứng minh rằng: $\frac{\cos 2a}{1+\sin 2a}=\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}$.

***Hướng dẫn giải***

$$\frac{\cos 2a}{1+\sin 2a}=\frac{\cos^2 a-\sin^2 a}{1+2\sin a\cos a}=\frac{(\cos a-\sin a)(\cos a+\sin a)}{\sin^2 a+\cos^2 a+2\sin a\cos a}$$
$$=\frac{(\cos a-\sin a)(\cos a+\sin a)}{(\sin a+\cos a)^2}=\frac{\cos a-\sin a}{\cos a+\sin a}.$$

**Đề 6.35:** Biết $\sin a+\cos a=\frac{1}{2}$, tính $\sin 2a$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $1=\sin^2 a+\cos^2 a=(\sin a+\cos a)^2-2\sin a.\cos a$

$$=\left(\frac{1}{2}\right)^2-\sin 2a$$

Suy ra: $\sin 2a=-\frac{3}{4}$.

**Đề 6.36:** Tính: a) $\cos\frac{\pi}{8}$ b) $\sin\frac{\pi}{8}$ c) $tg\frac{\pi}{8}$.

***Hướng dẫn giải***

a) Ta có: $\cos^2\frac{\pi}{8}=\frac{1+\cos\frac{\pi}{4}}{2}=\frac{1+\frac{\sqrt{2}}{2}}{2}=\frac{2+\sqrt{2}}{4}$

Vì $\cos\frac{\pi}{8}>0$ nên suy ra: $\cos\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

b) Tương tự : $\sin\frac{\pi}{8}=\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

c) Ta có $tg\frac{\pi}{8}=\frac{\sin\frac{\pi}{8}}{\cos\frac{\pi}{8}}=\sqrt{\frac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}=\sqrt{3-2\sqrt{2}}=\sqrt{2}-1$.

**Đề 6.37:** Chứng minh: $\sin^4 a+\cos^4 x=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\sin^4 a+\cos^4 x=\left(\sin^2 x+\cos^2 x\right)^2-2\sin^2 x.\cos^2 x$

$=1-\frac{1}{2}\sin^2 2x=1-\frac{1}{2}\left(\frac{1-\cos 4x}{2}\right)$

$=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cos 4x.$

**Đề 6.38:** Tính $\cos 2a$, $\sin 2a$, $tg2a$ biết:

a) $\cos a=-\frac{5}{13}$ và $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$ b) $tga=2$.

***Hướng dẫn giải***

a) * $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a=2\cos^2 a-1=2\left(\frac{-5}{13}\right)^2-1=\frac{-119}{169}$

* $\sin 2a=2\sin a.\cos a$ (1)

Ta có : $\sin^2 a=1-\cos^2 a=1-\left(\frac{-5}{13}\right)^2=\frac{144}{169}$

Vì $\pi<a<\frac{3\pi}{2}$ nên sina < 0, do đó $\sin a=-\sqrt{\frac{144}{169}}=-\frac{12}{13}$

Thay giá trị sina, cosa vào (1) ta có:

* $\sin 2a=2\left(-\frac{12}{13}\right)\left(\frac{-5}{13}\right)=\frac{120}{169}$

* $tg2a=\frac{\sin 2a}{\cos 2a}=-\frac{120}{169}$.



b) Theo công thức tính *sina, cosa, tga* theo $t=tg\frac{a}{2}$ ta có:

* $\sin 2a=\frac{2tga}{1+tg^2 a}=\frac{2.2}{1+2^2}=\frac{4}{5}$

* $\cos 2a=\frac{1-tg^2 a}{1+tg^2 a}=\frac{1-2^2}{1+2^2}=-\frac{3}{5}$

* $tg2a=\frac{2tga}{1-tg^2 a}=\frac{2.2}{1-2^2}=-\frac{3}{4}$.

**Đề 6.39:** Cho $\sin 2a=-\frac{4}{5}$ và $\frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}$. Tính sina và cosa.

***Hướng dẫn giải***

Từ $\frac{\pi}{2}<a<\frac{3\pi}{2}$ suy ra $\pi<2a<3\pi$

Nhưng vì $\sin 2a=-\frac{4}{5}<0$ nên $\pi<2a<2\pi$

Suy ra: $\frac{\pi}{2}<a<\pi$, do đó $\sin a>0,\cos a<0$

Ta có: $\cos 2a=\pm\sqrt{1-\sin^2 2a}=\pm\sqrt{1-\left(\frac{4}{5}\right)^2}=\pm\frac{3}{5}$

❖ Với: $\cos 2a=\frac{3}{5},\sin a=\sqrt{\frac{1-\cos 2a}{2}}=\sqrt{\frac{1}{5}},\cos a=\frac{\sin 2a}{2\sin a}=\frac{-\frac{4}{5}}{2\sqrt{\frac{1}{5}}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}$

❖ Với: $\cos 2a=-\frac{3}{5},\sin a=\sqrt{\frac{1+\frac{3}{5}}{2}}=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos a=\frac{-\frac{4}{5}}{2.\frac{2}{\sqrt{5}}}=-\frac{1}{\sqrt{5}}$

Vậy: $\sin a=\frac{1}{\sqrt{5}},\cos a=\frac{-2}{\sqrt{5}}$ hoặc $\sin a=\frac{2}{\sqrt{5}},\cos a=-\frac{1}{\sqrt{5}}$.

**Đề 6.40:** Tính:

a) $A=\sin\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{16}.\cos\frac{\pi}{8}$; b) $C=\sin 10^0.\sin 50^0.\sin 70^0$.

***Hướng dẫn giải***

a) $A=\sin\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{16}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{8}\cos\frac{\pi}{8}=\frac{1}{4}\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{8}$.

b) $C=\sin10^0\sin50^0\sin70^0$

$=\frac{1}{2\cos10^0}2.\sin10^0\cos10^0\sin50^0\sin70^0$

$=\frac{1}{2\cos10^0}.\sin20^0\cos20^0\sin50^0$

$=\frac{1}{4\cos10^0}.\sin40^0\cos40^0=\frac{1}{8\cos10^0}\sin80^0$

$=\frac{1}{8\cos10^0}\cos10^0=\frac{1}{8}$

Vậy: $C=\frac{1}{8}$.

**Đề 6.41:** Chứng minh:

a) $\cot gx+tgx=\frac{2}{\sin2x}$ b) $\cot gx-tgx=2\cot g2x$.

c) $\frac{\sin2x}{1+\cos2x}=tgx;\frac{1-\cos2x}{1+\cos2x}=tg^2x$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\cot gx+tgx=\frac{\cos x}{\sin x}+\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2x+\sin^2x}{\sin x\cos x}$

$=\frac{1}{\sin x\cos x}=\frac{2}{\sin2x}$.

b) $\cot gx-tgx=\frac{\cos x}{\sin x}-\frac{\sin x}{\cos x}=\frac{\cos^2x-\sin^2x}{\sin x.\cos x}$

$=\frac{\cos2x}{\frac{1}{2}\sin2x}=2\cot g2x$.

c) * $\frac{\sin2x}{1+\cos2x}=\frac{2\sin x\cos x}{2\cos^2x}=tgx$.

* $\frac{1-\cos2x}{1+\cos2x}=\frac{2\sin^2x}{2\cos^2x}=tg^2x$



**Đề 6.42:** Chứng minh:

a) $\cos4a=8\cos^4a-8\cos^2a+1$

b) $\sin^6a+\cos^6a=\frac{3}{8}\cos4a+\frac{5}{8}$.

***Hướng dẫn giải***

a) $\cos4a=\cos^22a-\sin^22a=\left(2\cos^2a-1\right)^2-4\sin^2a\cos^2a$

$=4\cos^4a-4\cos^2a+1-4\left(1-\cos^2a\right)\cos^2a$

$=8\cos^4a-8\cos^2a+1$.

b) $\sin^6a+\cos^6a=\left(\sin^2a\right)^3+\left(\cos^2a\right)^3$

$=\left(\sin^2a+\cos^2a\right)\left(\sin^4a-\sin^2a\cos^2a+\cos^4a\right)$

$=\left(\cos^2a+\sin^2a\right)^2-3\sin^2a\cos^2a$

$=1-\frac{3}{4}\sin^22a=1-\frac{3}{4}\left[\frac{1-\cos4a}{2}\right]$

$=\frac{3}{8}\cos4a+\frac{5}{8}$.

**Đề 6.43:** Dùng công thức $tgx=\frac{2t}{1-t^2}$, tính $tg\frac{\pi}{12}$.

***Hướng dẫn giải***

Đặt $t=tg\frac{\pi}{12}$, ta có t > 0, $t\neq1$ và $t\neq-1$.

Áp dụng công thức đã cho với $x=\frac{\pi}{6}$, ta được:

$$tg\frac{\pi}{6}=\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2t}{1-t^2}\Rightarrow t^2+2\sqrt{3}t-1=0.$$

Phương trình này có hai nghiệm $t_1=-\sqrt{3}-2,t_2=-\sqrt{3}+2$.

Nghiệm $t_1$ không thỏa mãn điều kiện.

Vậy ta có: $tg\frac{\pi}{12}=2-\sqrt{3}$.

**Đề 6.44:** Dùng công thức $tga = \dfrac{2t}{1-t^2}$, tính $tg\dfrac{\pi}{8}$.

***Hướng dẫn giải***

Đặt $t = tg\dfrac{\pi}{8} > 0$ ta có $t > 0$, $t \neq 1$ và $t \neq -1$.

Áp dụng công thức với $a = \dfrac{\pi}{4}$, ta được:

$$1 = \frac{2t}{1-t^2} \Leftrightarrow 1-t^2 = 2t \Leftrightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Leftrightarrow t = -1+\sqrt{2} > 0.$$

Vậy: $tg\dfrac{\pi}{8} = \sqrt{2} - 1$.

**Đề 6.45:** Biết $tg\dfrac{a}{2} = -\dfrac{2}{3}$, tính $\dfrac{2+3\cos a}{4-5\sin a}$.

***Hướng dẫn giải***

Ta có: $\sin a = \dfrac{2\left(-\dfrac{2}{3}\right)}{1+\left(-\dfrac{2}{3}\right)^2} = -\dfrac{12}{13}$

$$\cos a = \frac{1-\dfrac{4}{9}}{1+\dfrac{4}{9}} = \frac{5}{13}.$$

Suy ra: $\dfrac{2+3\cos a}{4-5\sin a} = \dfrac{2+\dfrac{15}{13}}{4+\dfrac{60}{13}} = \dfrac{41}{112}$.

*
**



# TOÁN TRẮC NGHIỆM

## ĐỀ 30: GÓC VÀ CUNG LƯỢNG GIÁC

**1.** Đổi số đo của góc $22^0 30'$ sang radian.

a) $\dfrac{\pi}{8}$ b) $\dfrac{\pi}{12}$ c) $\dfrac{\pi}{6}$ d) $\dfrac{\pi}{5}$.

**2.** Đổi số đo của góc $105^0$ sang radian.

a) $\dfrac{5\pi}{12}$ b) $\dfrac{7\pi}{12}$ c) $\dfrac{9\pi}{12}$ d) $\dfrac{5\pi}{8}$.

**3.** Đổi số đo của góc $\dfrac{\pi}{9}$ sang độ.

a) $15^0$ b) $18^0$ c) $20^0$ d) $25^0$.

**4.** Đổi số đo của góc $\dfrac{\pi}{24}$ sang độ.

a) $7^0$ b) $7^0 30'$ c) $8^0$ d) $8^0 30'$.

**5.** Một đường tròn có bán kính R = 10cm. Tìm độ dài của cung $40^0$ trên đường tròn.

a) ≈7cm b) ≈9cm c) ≈11cm d) ≈13cm.

**6.** Một đường tròn có bán kính $R = \dfrac{10}{\pi} m$. Tìm độ dài của cung $\dfrac{\pi}{2}$ trên đường tròn.

a) 10m b) 5m c) $\dfrac{20}{\pi^2} m$ d) $\dfrac{\pi^2}{20} m$.

**7.** Cho $a = \dfrac{\pi}{2} + k2\pi\,(k \in Z)$. Tìm k để $10\pi < a < 11\pi$.

a) k = 4 b) k = 6 c) k = 7 d) k = 5.

**8.** Cho $a = \dfrac{\pi}{3} + k2\pi\,(k \in Z)$. Tìm k để $a \in (19;27)$.

a) k = 2 ; k = 3 b) k = 3 ; k = 4
c) k = 4 ; k = 5 d) k = 5 ; k = 6.

**9.** Một bánh xe có 72 răng. Tính góc (bằng độ) mà bánh xe đã quay được khi di chuyển 10 răng.

a) $30^0$ b) $40^0$ c) $50^0$ d) $60^0$.

**10.** Cho góc lượng giác (OA, OB) có số đo bằng $\frac{\pi}{5}$. Hỏi trong các số sau, số nào là số đo của một góc lượng giác có cùng tia đầu, tia cuối?

a) $\frac{6\pi}{5}$ b) $-\frac{11\pi}{5}$ c) $\frac{9\pi}{5}$ d) $\frac{31\pi}{5}$.

## ĐỀ 31: CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

**1.** Cho $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Chọn kết quả đúng:

a) $\sin\alpha > 0; \cos\alpha > 0$ b) $\sin\alpha < 0; \cos\alpha < 0$

c) $\sin\alpha > 0; \cos\alpha < 0$ d) $\sin\alpha < 0; \cos\alpha > 0$.

**2.** Cho $2\pi < \alpha < \frac{5\pi}{2}$. Chọn kết quả đúng:

a) $tg\alpha > 0, \cot g\alpha > 0$ b) $tg\alpha < 0, \cot g\alpha < 0$.

c) $tg\alpha > 0, \cot g\alpha < 0$ d) $tg\alpha < 0, \cot g\alpha > 0$.

**3.** Giá trị $\sin\frac{47\pi}{6}$ là:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$.

**4.** Giá trị $\cos\frac{37\pi}{3}$ là:

a) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ b) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ c) $\frac{1}{2}$ d) $-\frac{1}{2}$.

**5.** Giá trị $tg\frac{29\pi}{4}$ là:

a) 1 b) -1 c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $\sqrt{3}$.

**6.** Giá trị $\cot g\frac{89\pi}{6}$ là:

a) $\sqrt{3}$ b) $-\sqrt{3}$ c) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) $-\frac{\sqrt{3}}{3}$.

**7.** Giá trị của $tg810^0$ là:

a) 1 b) 0

c) -1 d) Không xác định.



**8.** Giá trị của $\cot g1485^0$ là:

a) 1 b) -1

c) 0 d) Không xác định.

**9.** Cho $\sin\alpha = \frac{3}{5}$ và $\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi$. Tính $\cos\alpha$.

a) $\frac{4}{5}$ b) $-\frac{4}{5}$

c) $\pm\frac{4}{5}$ d) Một đáp số khác.

**10.** Cho $tg\alpha = -\frac{4}{5}$ với $\frac{3\pi}{2} < \alpha < 2\pi$. Khi đó:

a) $\sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}; \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$

b) $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}; \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$

c) $\sin\alpha = -\frac{4}{\sqrt{41}}; \cos\alpha = \frac{5}{\sqrt{41}}$

d) $\sin\alpha = \frac{4}{\sqrt{41}}; \cos\alpha = -\frac{5}{\sqrt{41}}$.

## ĐỀ 32: CÁC GIÁ TRỊ LƯỢNG GIÁC CỦA MỘT CUNG

**1.** Cho $\sin x = \frac{3}{5}$ và $90^0 < x < 180^0$. Tính: $E = \frac{\cot gx - 2tgx}{tgx + 3\cot gx}$.

a) $E = \frac{2}{57}$ b) $E = -\frac{2}{57}$

c) $E = \frac{4}{57}$ d) $E = -\frac{4}{57}$.

**2.** Cho $tg\alpha = 2$. Tính $A = \frac{3\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha - \cos\alpha}$.

a) A = 5 b) $A = \frac{5}{3}$ c) A = 7 d) $A = \frac{7}{3}$.

**3.** Đơn giản biểu thức sau: $A = \left(1 - \sin^2 x\right)\cot g^2 x + \left(1 - \cot g^2 x\right)$.

a) $A = \sin^2 x$ b) $A = \cos^2 x$.

c) $A = -\sin^2 x$ d) $A = -\cos^2 x$.

**4.** Đơn giản biểu thức sau: $A=\dfrac{2\cos^2 x-1}{\sin x+\cos x}$.

a) $A=\cos x+\sin x$ b) $A=\cos x-\sin x$

c) $A=\sin x-\cos x$ d) Một đáp số khác.

**5.** Tính giá trị của biểu thức: $A=\sin^6 x+\cos^6 x+3\sin^2 x.\cos^2 x$.

a) A = –1 b) A = 1 c) A = 4 d) A = –4.

**6.** Cho tam giác ABC. Hãy tìm mệnh đề sai:

a) $\sin\dfrac{A+C}{2}=\cos\dfrac{B}{2}$ b) $\cos\dfrac{A+C}{2}=\sin\dfrac{B}{2}$

c) $\sin(A+B)=\sin C$ d) $\cos(A+B)=\cos C$.

**7.** Đơn giản biểu thức: $A=\cos\left(\alpha-\dfrac{\pi}{2}\right)+\sin(\alpha-\pi)$.

a) $A=\cos\alpha+\sin\alpha$ b) $A=2\sin\alpha$

c) $A=\sin\alpha-\cos\alpha$ d) A = 0.

**8.** Đơn giản biểu thức:

$$A=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)+\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)-\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right).$$

a) $A=2\sin\alpha$ b) $A=2\cos\alpha$

c) $A=\sin\alpha-\cos\alpha$ d) A = 0.

**9.** Với mọi $\alpha$, biểu thức: $\cos\alpha+\cos\left(\alpha+\dfrac{\pi}{5}\right)+...+\cos\left(\alpha+\dfrac{9\pi}{5}\right)$. Nhận giá trị bằng:

a) 10 b) 10.

c) 0 d) Một đáp số khác.

**10.** Tính giá trị của biểu thức:

$$A=\sin^2\frac{\pi}{3}+\sin^2\frac{\pi}{6}+\sin^2\frac{\pi}{9}+\sin^2\frac{2\pi}{9}+\sin^2\frac{5\pi}{8}+\sin^2\frac{7\pi}{8}.$$

a) A = 6 b) A = 3

c) $A=\dfrac{3}{2}$ d) Một đáp số khác.



## ĐỀ 33: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

**1.** Tính $\sin 75^0$.

a) $\dfrac{\sqrt{3}-1}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{3}+1}{4}$

c) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)}{4}$.

**2.** Tính $\cot g 75^0$.

a) $2-\sqrt{3}$ b) $2+\sqrt{3}$

c) $\dfrac{2}{2-\sqrt{3}}$ d) $\dfrac{2}{2+\sqrt{3}}$.

**3.** Rút gọn biểu thức: $\cos 54^0.\cos 4^0-\cos 36^0.\cos 86^0$.

a) $\cos 50^0$ b) $\cos 58^0$ c) $\sin 50^0$ d) $\sin 58^0$.

**4.** Rút gọn biểu thức: $\sin(\alpha-17^0)\cos(\alpha+13^0)-\sin(\alpha+13^0)\cos(\alpha-17^0)$.

a) $\sin 2\alpha$ b) $\cos 2\alpha$ c) $-\dfrac{1}{2}$ d) $\dfrac{1}{2}$.

**5.** Rút gọn biểu thức: $\cos\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)-\cos\left(x-\dfrac{\pi}{4}\right)$.

a) $\sqrt{2}\sin x$ b) $-\sqrt{2}\sin x$ c) $\sqrt{2}\cos x$ d) $-\sqrt{2}\cos x$.

**6.** Rút gọn biểu thức: $\cos(120^0-x)+\cos(120^0+x)-\cos x$.

a) 0 b) $-\cos x$ c) $-2\cos x$ d) $\sin x-\cos x$.

**7.** Chọn khẳng định đúng nhất trong các khẳng định sau:

a) $\cos 2a=\cos^2 a-\sin^2 a$ b) $\cos 2a=2\cos^2 a-1$.

c) $\cos 2a=1-2\sin^2 a$ d) Cả a, b, c đều đúng.

**8.** Kết quả nào sau đây không đúng:

a) $\sin 3a=3\sin a-4\sin^3 a$ b) $\cos 3a=4\cos^3 a-3\cos a$

c) $tg3a=\dfrac{3tga-tg^3 a}{1-3tg^2 a}$ d) $\sin 3a=4\sin^3 a-3\sin a$.

**9.** Biết $tg\dfrac{a}{2}=\dfrac{2}{5}$. Tính $\sin a$.

a) $\dfrac{10}{29}$ b) $\dfrac{20}{29}$ c) $\dfrac{4}{25}$ d) $\dfrac{21}{25}$.

**10.** Biết $tga = 2$. Hãy tính giá trị của biểu thức: $\dfrac{\sin a + \cos a}{3\sin a - 2\cos a}$.

a) $\dfrac{1}{9}$ b) $\dfrac{2}{9}$ c) $\dfrac{1}{18}$ d) Một đáp số khác.

## ĐỀ 34: CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC

**1.** Tính $\sin\dfrac{13\pi}{12}$.

a) $\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$

c) $-\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

**2.** Tính $\cos\dfrac{37\pi}{12}$.

a) $\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ b) $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

c) $-\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ d) $\dfrac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

**3.** Cho hai góc nhọn a và b với $tga = \dfrac{1}{7}$ và $tgb = \dfrac{3}{4}$. Tính a + b.

a) $\dfrac{\pi}{3}$ b) $\dfrac{\pi}{4}$

c) $\dfrac{\pi}{6}$ d) Một đáp số khác.

**4.** Cho $tg\dfrac{a}{2} = \dfrac{7}{8}$. Tính $\sin a$.

a) $\dfrac{15}{113}$ b) $\dfrac{98}{113}$ c) $\dfrac{112}{113}$ d) $\dfrac{1}{113}$.

**5.** Cho $\cot g\dfrac{a}{2} = \dfrac{8}{7}$. Tính $\cos a$.

a) $\dfrac{15}{113}$ b) $\dfrac{98}{113}$ c) $\dfrac{112}{113}$ d) $\dfrac{1}{113}$.

**6.** Cho $\cos a$ = m. Hãy tính $\cos 2a$ theo m.

a) $1-2m^2$ b) $2m^2-1$

c) 2m d) Một đáp số khác.



**7.** Cho $\cos a$ = m. Hãy tính $\sin^2 2a$ theo m.

a) $4m^2$ b) $1-m^2$

c) $4m^2(1+m^2)$ d) $4m^2(1-m^2)$.

**8.** Cho $\sin a$ = m. Hãy tính $\sin^2 2a$ theo m.

a) $4m^2$ b) $m^2-1$

c) $4m^2(m^2-1)$ d) $4m^2(1-m^2)$.

**9.** Cho $\cos a = \dfrac{3}{4}; \sin a > 0; \sin b = \dfrac{3}{5}; \cos b < 0$. Tính $\cos(a+b)$

a) $\dfrac{3}{5}\left(1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ b) $-\dfrac{3}{5}\left(1+\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$

c) $\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ d) $-\dfrac{3}{5}\left(1-\dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$.

**10.** Cho $\sin a = \dfrac{3}{5}; \cos a < 0; \cos b = \dfrac{3}{4}; \sin b > 0$. Tính $\sin(a-b)$.

a) $-\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}+\dfrac{9}{4}\right)$ b) $-\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}-\dfrac{9}{4}\right)$

c) $\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}+\dfrac{9}{4}\right)$ d) $\dfrac{1}{5}\left(\sqrt{7}-\dfrac{9}{4}\right)$.

## ĐỀ 35: ÔN TẬP CHƯƠNG VI

**1.** Hãy điền vào chỗ trống (...)

a) $\sin 750^0 = ...$ b) $\sin 930^0 = ...$

c) $\cos 1470^0 = ...$ d) $\cos 1650^0 = ...$

**2.** Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng với các mệnh đề.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $\sin(x+8\pi) = \sin x$ | | |
| b) $\sin(x+9\pi) = -\sin x$ | | |
| c) $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cos x$ | | |
| d) $tg\left(\dfrac{\pi}{2}-x\right) = \cot gx$ | | |

**3.** Ghép mỗi dòng ở cột trái với một dòng ở cột phải để được một khẳng định đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) $\alpha$ và $-\alpha$ | A) là hai cung bù nhau |
| b) $\alpha$ và $(\pi-\alpha)$ | B) là hai cung phụ nhau |
| c) $\alpha$ và $(\pi+\alpha)$ | C) là hai cung đối nhau |
| d) $\alpha$ và $\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$ | D) là hai cung hơn kém $\pi$ |

**4.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một kết quả đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) $\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=...$ | A) $-\cos\alpha$ |
| b) $\cos(\pi+\alpha)=....$ | B) $\cot g\alpha$ |
| c) $tg\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=...$ | C) $\cos\alpha$ |
| d) $\cot g(\pi-\alpha)=...$ | D) $-\cot g\alpha$ |

**5.** Cho $\pi<\alpha<\frac{3\pi}{2}$. Đánh dấu "x" vào ô đúng, sai tương ứng với các mệnh đề sau.

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $\sin\alpha>0$ | | |
| b) $\cos\alpha>0$ | | |
| c) $tg\alpha<0$ | | |
| d) $\cot g\alpha>0$ | | |

**6.** Cho $\alpha=\frac{79\pi}{6}$. Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... của cột 1 để được một khẳng định đúng.



| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) $\sin\alpha=...$ | A) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ |
| b) $\cos\alpha=...$ | B) $-\frac{1}{2}$ |
| c) $tg\alpha=...$ | C) $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ |
| d) $\cot g\alpha=...$ | D) $\sqrt{3}$ |

**7.** Đặt $t=tg\frac{x}{2}$. Hãy điền vào chỗ trống (...) để được công thức tính sinx, cosx, tgx, cotgx theo t (với điều kiện công thức có nghĩa).

a) sinx = ... b) cosx = ...

c) tgx = ... d) cotgx = ...

**8.** Lấy kết quả ở cột 2 đặt vào vị trí ... ở cột 1 để được một khẳng định đúng.

| Cột 1 | Cột 2 |
|---|---|
| a) $\cos^2 a=...$ | A) $\frac{3\cos a+\cos 3a}{4}$ |
| b) $\sin^2 a=....$ | B) $\frac{1+\cos 2a}{2}$ |
| c) $\cos^3 a=...$ | C) $\frac{3\sin a-\sin 3a}{4}$ |
| d) $\sin^3 a=...$ | D) $\frac{1-\cos 2a}{2}$ |

**9.** Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $\sin(a+b)=\sin.a\cos b+\cos b.\sin a$ | | |
| b) $\sin(a-b)=\sin a.\cos b-\cos b.\sin a$ | | |
| c) $\cos(a+b)=\cos a.\cos b+\sin a.\sin b$ | | |
| d) $\cos(a-b)=\cos a.\cos b-\sin a.\sin b$ | | |

**10.** Xác định tính đúng, sai của các mệnh đề sau:

| Mệnh đề | Đ | S |
|---|---|---|
| a) $\sin x+\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ | | |
| b) $\sin x-\cos x=\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ | | |
| c) $\cos x+\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ | | |
| d) $\cos x-\sin x=\sqrt{2}\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)$ | | |

❀❀❀

## ĐÁP ÁN

| Đề \ Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 30 | a | b | c | b | a | b | d | b | c | d |
| 31 | c | a | d | c | a | b | d | a | b | c |
| 32 | b | c | a | b | b | d | d | a | c | b |
| 33 | d | a | b | c | b | c | d | d | b | d |
| 34 | b | c | b | c | a | b | d | d | b | c |

**ĐỀ 35**

| Câu | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| a | $\frac{1}{2}$ | Đ | C | C | S | B | $\frac{2t}{1+t^2}$ | B | Đ | Đ |
| b | $-\frac{1}{2}$ | Đ | A | A | S | C | $\frac{1-t^2}{1+t^2}$ | D | Đ | Đ |
| c | $\frac{\sqrt{3}}{2}$ | S | D | B | S | A | $\frac{2t}{1-t^2}$ | A | S | Đ |
| d | $-\frac{\sqrt{3}}{2}$ | A | B | D | Đ | D | $\frac{1-t^2}{t}$ | C | S | Đ |



# Mục lục


*Lời nói đầu* ..... 03

**CHƯƠNG I: MỆNH ĐỀ - TẬP HỢP** ..... 05

§1. Mệnh đề ..... 05

§2. Mệnh đề chứa biến - Kí hiệu ∀, ∃ ..... 09

§3. Phương pháp chứng minh bằng phản chứng ..... 11

§4. Tập hợp ..... 12

§5. Các phép toán trên tập hợp ..... 16

§6. Các tập hợp số ..... 18

§7. Số gần đúng - Sai số ..... 20

§8. Cách viết số gần đúng ..... 23

Toán trắc nghiệm ..... 25

Đáp án ..... 34

**CHƯƠNG II: HÀM SỐ BẬC NHẤT VÀ BẬC HAI** ..... 35

§1. Hàm số ..... 35

§2. Hàm số bậc nhất ..... 40

§3. Hàm số $y=|x|;\ y=|ax+b|;\ y=[x]$ ..... 45

§4. Hàm số bậc hai ..... 50

Toán trắc nghiệm ..... 54

Đáp án ..... 64

**CHƯƠNG III: PHƯƠNG TRÌNH VÀ HỆ PHƯƠNG TRÌNH** ..... 65

§1. Khái niệm phương trình ..... 65

§2. Phương trình bậc nhất một ẩn và hai ẩn ..... 70

§3. Hệ phương trình bậc nhất nhiều ẩn ..... 76

§4. Phương trình bậc hai ..... 84

§5. Phương trình bậc hai với hai ẩn ..... 94

Toán trắc nghiệm ..... 98

Đáp án ..... 109

**CHƯƠNG IV: BẤT ĐẲNG THỨC VÀ BẤT PHƯƠNG TRÌNH** ..... 110

§1. Bất đẳng thức ..... 110

§2. Bất đẳng thức Côsi - Bất đẳng thức chứa giá trị tuyệt đối ..... 116

§3. Bất phương trình một ẩn ..... 126

§4. Dấu của nhị thức bậc nhất ..... 133

§5. Bất phương trình bậc nhất hai ẩn ..... 142

§6. Dấu của tam thức bậc hai, bất phương trình bậc hai ..... 147
§7. Định lí đảo về dấu của tam thức bậc hai ..... 159
Toán trắc nghiệm ..... 164
Đáp án ..... 178

**CHƯƠNG V: THỐNG KÊ** ..... 179
§1. Bảng phân phối thực nghiệm tần suất ghép lớp ..... 179
§2. Biểu đồ tần suất - Biểu đồ hình quạt ..... 184
§3. Số trung bình cộng - Mốt - Số trung vị ..... 189
§4. Phương sai và độ lệch chuẩn ..... 192
§5. Hệ số biến thiên ..... 197
Toán trắc nghiệm ..... 199
Đáp án ..... 207

**CHƯƠNG VI: GÓC LƯỢNG GIÁC VÀ CÔNG THỨC LƯỢNG GIÁC** ..... 208
§1. Góc và cung lượng giác ..... 208
§2. Các giá trị lượng giác của một cung ..... 215
§3. Công thức lượng giác ..... 226
Toán trắc nghiệm ..... 239
Đáp án ..... 248
***Mục lục*** ..... 249

*
**



# CÁC DẠNG BÀI TẬP TRẮC NGHIỆM ĐẠI SỐ 10

*(Ban khoa học tự nhiên)*

**Ths. Nguyễn Văn Phước**

Chịu trách nhiệm xuất bản:
TRẦN ĐÌNH VIỆT

Biên tập : HÀ NGỌC CƯỜNG
Sửa bản in : PHƯƠNG THẢO
Trình bày : BẢO NGỌC
Bìa : MINH DIỄN

**NHÀ XUẤT BẢN TỔNG HỢP TP. HỒ CHÍ MINH**
***62 Nguyễn Thị Minh Khai - Q.1***
ĐT: 8225340 - 8296764 - 8220405 - 8296713 - 8223637
Fax: 84.8.8222726 * Email: nxbtphcm@vnn.vn

**Thực hiện liên kết:** Đại lí Sách Việt

In 2.000 cuốn khổ 16x24cm, tại Công ty In Hưng Phú. Số đăng ký kế hoạch xuất bản: 309 - 2006/CXB/48-24/THTPHCM. Giấy Quyết định xuất bản số 535/QĐ-THTPHCM của NXB THTPHCM cấp ngày 30/5/2006. In xong và nộp lưu chiểu tháng 7/2006.